RADU BUDEI
LUMINIȚA BUDEI
RADU ROMANICĂ
EUGEN CORDUNEANU

PROBLEME DE MECANICĂ

INERȚIE

Editura Tehnica-Info
Chișinău, 2005

Scanned with OKEN Scanner

RADU BUDEI LUMINIȚA BUDEI RADU
ROMANICĂ EUGEN CORDUNEANU

INERȚIE

PROBLEME DE MECANICĂ

Scanned with OKEN Scanner

RADU BUDEI
LUMINIȚA BUDEI
RADU ROMANICĂ
EUGEN CORDUNEANU

INERȚIE

PROBLEME DE MECANICĂ

Editura Tehnica-Info
Chișinău, 2005

Scanned with OKEN Scanner

Tehnoredactare computerizată: Luminița BUDEI

Grafica: Radu ROMANICĂ

Foto coperta: Sorin STAN

Descrierea CIP Bibliotecii Naționale
Budei, Radu; Budei, Luminița; Romanică, Radu; Corduneanu, Eugen
INERȚIE. PROBLEME DE MECANICĂ
Editura Tehnica Info – Chișinău, 2005
91p., 21 cm
ISBN: 9975-910-31-7
CZU 512.64 (075.8)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Momentele de inerție sunt larg studiate la universitățile tehnice. Lucrarea aceasta este gândită ca material didactic pentru orele de seminar şi pentru teme acasa. Exemplele au fost rezolvate în detaliu pentru a uşura studiul individual. Cartea se adresează studenților de la profilul construcții sau mecanică.

Autorii

CUPRINS

I. Momente de inerție – elemente teoretice 7

I.1. Momente de inerție mecanice în spațiu 7
I.2. Momente de inerție mecanice în plan 10
I.3. Momente de inerție geometrice în plan..... 14
I.4. Momente de inerție pentru figuri particulare 16
I.5. Momente de inerție folosite în problemele propuse 35

II. Momente de inerție pentru plăci plane formate din dreptunghiuri.....39

II.1. Exemplu de calcul 39
II.2. Aplicații – figuri formate din dreptunghiuri 51

III. Momente de inerție pentru plăci plane asimetrice.....55

III.1. Exemplu de calcul 55
III.2. Aplicații – plăci asimetrice 67

IV. Momente de inerție pentru plăci plane simetrice.....73

III.1. Exemplu de calcul 73
III.2. Aplicații – plăci plane simetrice 86

Anexă 90

Bibliografie 91

Scanned with OKEN Scanner

I. MOMENTE DE INERȚIE – ELEMENTE TEORETICE

I.1. Momente de inerție mecanice în spațiu

Momentul de inerție mecanic planar, axial sau polar, este suma de produse între masele particulelor şi pătratele distanțelor lor fie față de un plan, o axă sau un pol (Fig. I.1).

- Momente de inerție planare:

$$\begin{cases} J_{xOy} = \sum_i m_i z_i^2 \\ J_{yOz} = \sum_i m_i x_i^2 \\ J_{zOx} = \sum_i m_i y_i^2 \end{cases} \qquad \text{(I.1)}$$

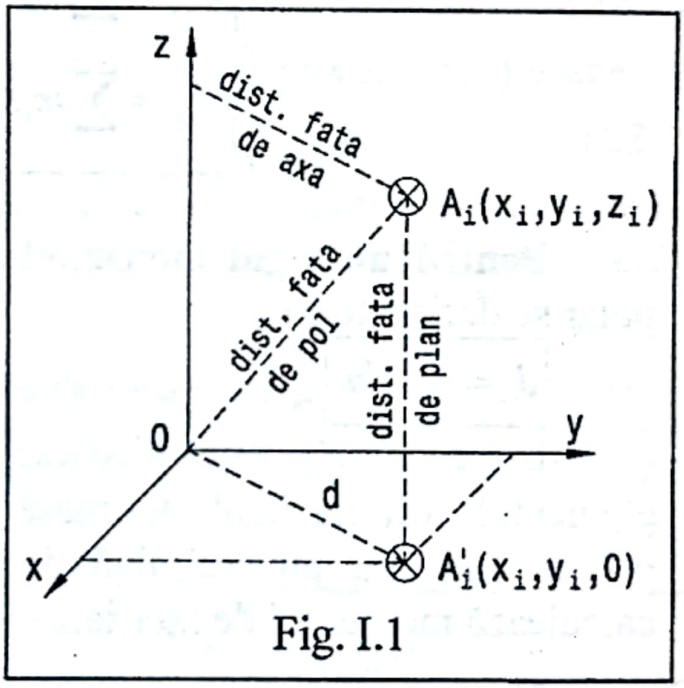


Fig. I.1

- Momente de inerție axiale:

$$\begin{cases} J_x = J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ J_y = J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ J_z = J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases} \qquad \text{(I.2)}$$

- Momentul de inerție polar:

$$J_0 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad \text{(I.3)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Legătura între diversele momente de inerţie în spaţiu:

$$J_O = J_{xOy} + J_{yOz} + J_{xOz} = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) \tag{I.4}$$

Momente de inerţie mecanice centrifugale sunt momentele de ordinul doi în care apar sume de produse între masă şi două distanţe fată de două plane de coordonate. Spre deosebire de momentul de inerţie axial sau polar care este pozitiv, momentul de inerţie centrifugal are semn. El este nul in raport cu elemente de simetrie.

$$\begin{cases} J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \\ J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i \\ J_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i \end{cases} \tag{I.5}$$

Pentru un rigid momentul de inerţie planar, axial sau polar se defineşte ca:

$$J = \int d^2 dm \tag{I.6}$$

în care d este distanţa de la elementul infinitezimal de masă dm la planul, axa sau punctul faţă de care se calculează momentul de inerţie.

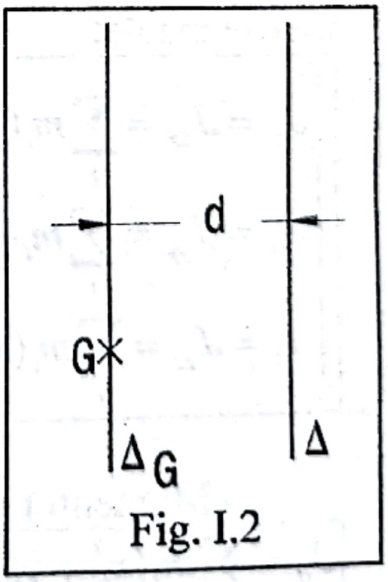


Fig. I.2

Variaţia momentelor de inerţie axiale în raport cu axe paralele - relaţia lui Steiner

Se dau poziţia axei Δ faţă de care se calculează momentul de inerţie axial şi poziţia centrului de masa G. Prin centrul de masa G se duce o paralelă la axa Δ notată Δ_G (Fig. I.2).

Scanned with OKEN Scanner

Relaţia lui STEINER este:

$$J_\Delta = J_{\Delta_G} + M \cdot d^2 \qquad \text{(I.7)}$$

unde d este distanţa de la axa care trece prin centrul de masă până la axa Δ iar M este masa figurii.

Observaţii:

1. Momentul de inerţie minim faţă de axele unei familii de drepte paralele se realizează faţă de axa care trece prin centrul de masă.

2. Locul geometric al axelor din familia de drepte de mai sus, în raport cu care se obţine acelaşi moment de inerţie, este un cilindru circular drept cu axa de simetrie trecând prin centrul de masă.

Relaţia lui Steiner pentru momente de inerţie polare:

$$J_P = J_G + M \cdot d^2 \qquad \text{(I.8)}$$

în care P este polul faţă de care se doreşte calcularea momentului de inerţie, G este centrul de masa, M este masa sistemului, d este distanţa PG.

Relaţia lui Steiner pentru două axe paralele oarecare

În multe aplicaţii se cunoaşte momentul de inerţie faţă de o axă care nu trece prin centrul de masa al figurii şi se cere momentul de inerţie faţă de o axă paralelă cu ea. Se cunosc poziţiile axelor şi masa sistemului.

Fie d_1, d_2 distanţele între axa care trece prin centrul de masă a G şi cele două axe Δ_1 şi Δ_2, paralele cu ea (Fig. I.3).

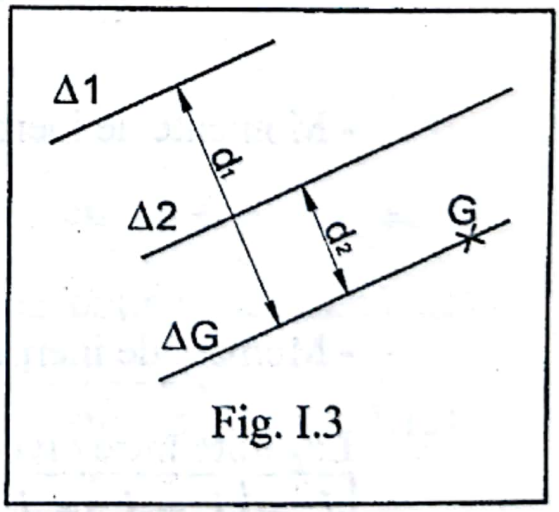


Fig. I.3

Se aplică relaţia lui Steiner pentru fiecare axă în parte:

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_G} + M \cdot d_1^2$$

$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_G} + M \cdot d_2^2$$

$$J_{\Delta_1} - J_{\Delta_2} = M \cdot (d_1^2 - d_2^2) \Rightarrow \boxed{J_{\Delta_1} = J_{\Delta_2} + M(d_1^2 - d_2^2)} \quad \text{(I.9)}$$

Momentul de inerție față de o axă Δ_1 este egal cu momentul de inerție față de altă axă Δ_2 paralelă cu ea, plus produsul dintre masa totală și diferența pătratelor distanțelor de la centrul de masă la cele două axe. Relația mai poartă numele de relația lui Steiner generalizată.

I.2. Momente de inerție mecanice in plan

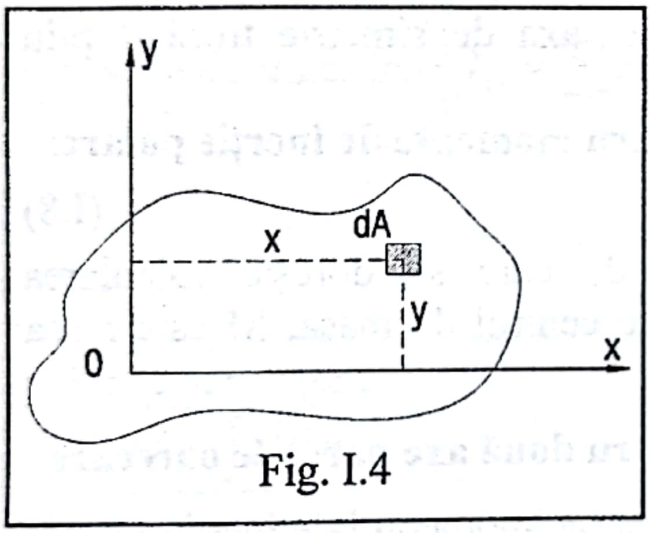


Fig. I.4

În plan se lucrează cu momente de inerție axiale, polare și centrifugale (Fig. I.4).

- Momente de inerție axiale:

$$\boxed{\begin{cases} J_x = \sum_i m_i y_i^2 \\ J_y = \sum_i m_i x_i^2 \\ J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{cases}} \quad \text{(I.10)}$$

- Moment de inerție polar:

$$\boxed{J_O = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)} \quad \text{(I.11)}$$

Legătura între diverse momente de inerție în plan:

$$\boxed{J_O = (J_x + J_y) = J_z} \quad \text{(I.12)}$$

Scanned with OKEN Scanner

- Moment de inerţie centrifugal: $$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad \text{(I.13)}$$

Variaţia momentului de inerţie axial în raport cu axe concurente, în plan

Fie S o suprafaţă căreia îi cunoaştem momentele de inerţie J_x, J_y, J_{xy}. Momentul de inerţie faţă de axa Δ_1 de versor $\bar{u}$ rotită cu un unghi φ variabil faţă de axa Ox (Fig. I.5) este:

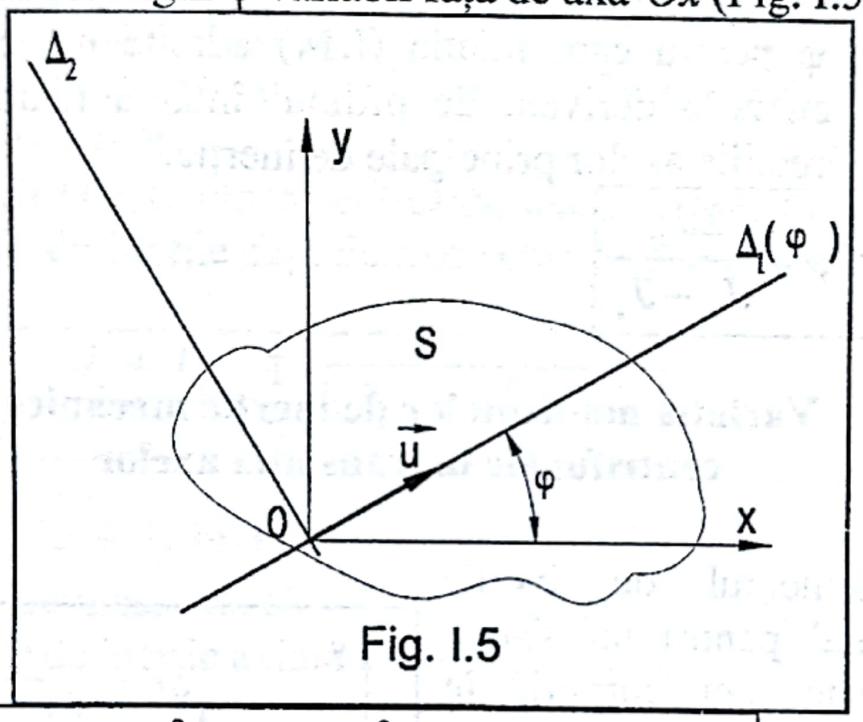


Fig. I.5

$$J_{\Delta_1} = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - 2J_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \quad \text{(I.14)}$$

Pentru $\varphi = 0 \Rightarrow J_{\Delta 1} = J_x$

iar pentru $\varphi = \pi/2 \Rightarrow J_{\Delta_1} = J_y$

Considerând o axă Δ_2 rotită cu $\varphi + \frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric în raport cu axa Ox, se obţine momentul de inerţie:

$$J_{\Delta_2} = J_x \sin^2\varphi + J_y \cos^2\varphi + 2J_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \quad \text{(I.15)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea axelor principale de inerţie în plan

J_Δ ia o valoare care oscilează între o valoare maximă şi una minimă. **Momentele de inerţie principale** sunt valorile extreme (minime sau maxime) când direcţia axei Δ variază. Axele care trec prin O, pentru care momentul de inerţie este maxim sau minim, se numesc **axe sau direcţii principale de inerţie.**

Pentru determinarea unei axe principale de inerţie calculăm φ pentru care relaţia (I.14) admite un extrem. Se egalează cu zero derivata de ordinul întâi a relaţiei (I.14). Rezultă direcţiile axelor principale de inerţie:

$$\boxed{tg2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}} \qquad \text{(I.16)}$$

Variaţia momentelor de inerţie mecanice centrifugale la translaţia axelor

Momentul de inerţie centrifugal pentru un sistem de puncte sau corpuri, în raport cu un sistem de axe Oxy, este egal cu momentul de inerţie centrifugal în raport cu un sistem de axe paralel $Gx'y'$, cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte, $G(x_G, y_G)$, adunat cu produsul dintre masă şi coordonatele centrului de masă (Fig. I.6).

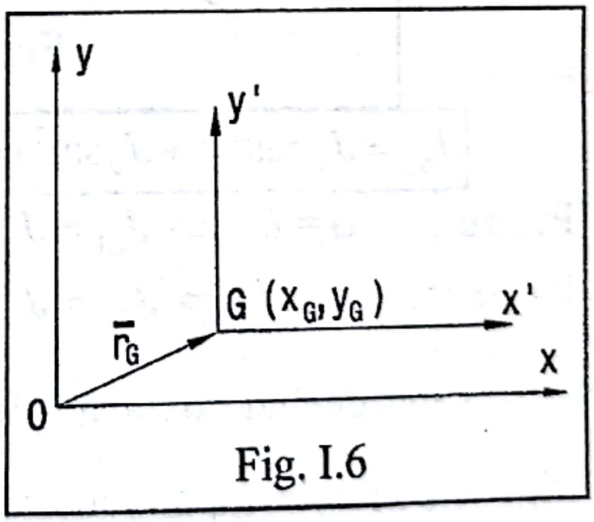


Fig. I.6

$$\boxed{J_{xy} = J_{x'y'} + x_G y_G M} \qquad \text{(I.17)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momente de inerţie faţă de axe centrale şi faţă de axe centrale principale

Axele care au originea în centrul de greutate sunt **axe centrale.** Momentele de inerţie axiale calculate după aceste axe se numesc **momente de inerţie centrale.**

Axele principale care au originea în centrul de greutate se numesc **axe principale centrale de inerţie.** Momentele principale de inerţie relativ la centrul de masă se numesc **momente principale centrale. Axele de simetrie sunt axe principale de inerţie.**

Dacă O este chiar centrul de masă al sistemului, atunci momentele de inerţie faţă de axe centrale principale sunt date de:

$$J_{I,II} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2} \qquad \text{(I.18)}$$

Rază de inerţie

Se definesc razele de inerţie sau de giraţie pentru momentele de inerţie axiale în modul următor:

$$i_\Delta = \sqrt{\frac{J_\Delta}{M}} \qquad \text{(I.19)}$$

Semnificaţia razei de inerţie apare scriind relaţia sub forma: $J_\Delta = M \cdot i_\Delta^2$

Raza de inerţie este distanţa faţă de axa Δ la care trebuie să se găsească un punct material fictiv, având acelaşi moment de inerţie ca întregul sistem de puncte materiale considerat.

Pentru momente de inerţie polare: $i_G = \sqrt{\frac{J_G}{M}}$, în care G este centrul de masă.

Scanned with OKEN Scanner

I.3. Momente de inerţie geometrice în plan

Deseori se folosesc momente de inerţie geometrice în loc de momentele de inerţie mecanice. Cu ajutorul lor se pot determina simplu momentele de inerţie mecanice pentru corpuri prismatice omogene care prezintă un plan de simetrie geometrică.

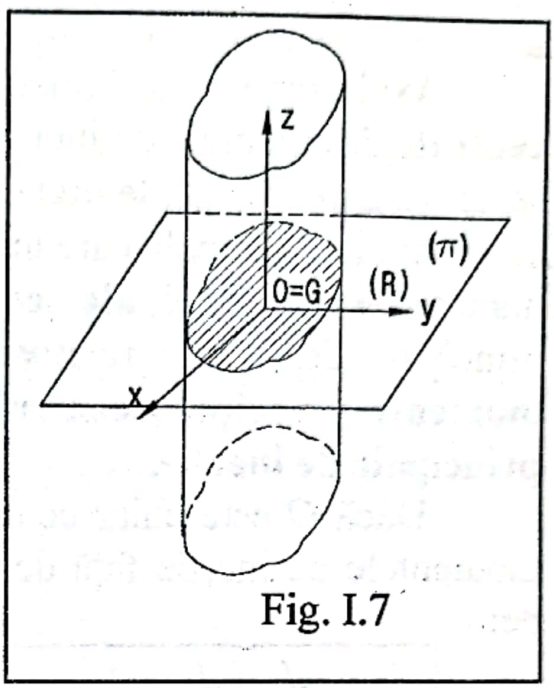


Fig. I.7

Considerăm un solid sub formă de prismă dreaptă cu planul π plan de simetrie; în acest plan luăm reperul xOy cu $G \equiv O$ (G este centrul de masă al suprafeţei plane) (Fig. I.7). Axa Oz este axă principală centrală de inerţie de inerţie. Direcţia celorlalte două axe principale centrale va fi determinată cu ajutorul momentelor de inerţie geometrice. Se determină momentele de inerţie pe suprafaţa secţionată de planul π (Fig. I.8)

Cu ajutorul unui element de suprafaţă dA, se pot defini următoarele momente de inerţie geometrice în plan:

a) Momente de inerţie geometrice axiale:

$$\boxed{I_\Delta = \int_A \delta^2 dA} \qquad \text{(I.20)}$$

unde δ este distanţa de la elementul dA la dreapta (Δ)sau

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 dA} \text{ şi } \boxed{I_y = \int_A x^2 dA} \qquad \text{(I.21)}$$

b) Momente de inerţie geometrice centrifugale:

$$\boxed{I_{xy} = \int_A xy\, dA} \qquad \text{(I.22)}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Moment de inerţie geometric polar:

$$I_O = \int_A (x^2 + y^2)\,dA \tag{I.23}$$

Comparativ cu momentele de inerţie mecanice, la momentele de inerţie geometrice elementul masă, dm, este înlocuit cu elementul geometric de volum dV, suprafaţă dA sau lungime dl.

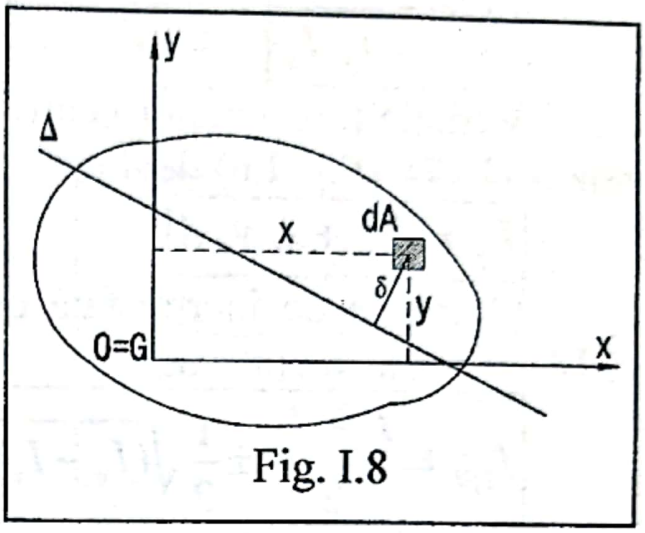


Fig. I.8

Toate relaţiile de calcul prezentate pentru momentele de inerţie mecanice îşi modifică forma corespunzător.

De exemplu relaţia (I.7) a lui Steiner (Fig. I.2), pentru momente de inerţie axiale mecanice, devine pentru momente de inerţie axiale geometrice:

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + A \cdot d^2 \tag{I.24}$$

în care A este aria.

Variaţia momentelor de inerţie axiale faţa de două axe paralele se obţine scriind relaţia (I.9) (Fig. I.3) pentru momente de inerţie geometrice: $I_{\Delta_1} = I_{\Delta_2} + A(d_1^2 - d_2^2)$ (I.25)

Momentul de inerţie faţă de o axă Δ_1 rotită cu unghiul φ faţă de axa Ox

Relaţia (I.14) devine (Fig. I.5):

$$I_{\Delta_1} = I_x \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \tag{I.26}$$

iar pentru o axă rotită cu unghiul $\varphi + \pi/2$ faţă de axa Ox:

$$I_{\Delta_2} = I_x \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + 2I_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$

Scanned with OKEN Scanner

Direcţiile axelor principale de inerţie din relaţia (I.16) se vor calcula cu:

$$\boxed{tg2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_{y-}I_x}} \qquad (I.27)$$

Variaţia momentelor centrifugale la translaţia axelor din relaţia (I.17), (Fig. I.6) devine:

$$\boxed{I_{xy} = I_{x'y'} + x_G y_G A} \qquad (I.28)$$

Momente de inerţie faţă de axe centrale principale din (I.18) se scriu cu ajutorul:

$$\boxed{I_{I,II} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \qquad (I.29)$$

Raza de inerţie sau de giraţie pentru momente de inerţie axiale, dată de relaţia (I.19), se va scrie:

$$\boxed{i_\Delta = \sqrt{\frac{I_\Delta}{A}}} \qquad (I.30)$$

Numai în plan, pentru corpuri rigide, se poate scrie relaţia:

$$\boxed{J = \rho I} \qquad (I.31)$$

I.4. Momente de inerţie pentru figuri particulare

Momentele de inerţie pentru diverse figuri particulare se găsesc în tabele în literatura de specialitate.

Scanned with OKEN Scanner

Bară dreaptă

Se dau cunosc lungimea barei L și densitatea de lungime ρ_l (Fig. I.9).

Se cer momentele de inerție planare, axiale, momentul de inerție polar față de originea sistemului de referință și momentele de inerție centrifugale:

$$\begin{cases} J_{xOy}, J_{yOz}, J_{xOz} \\ J_x, J_y, J_z \\ J_O \\ J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} \end{cases}$$

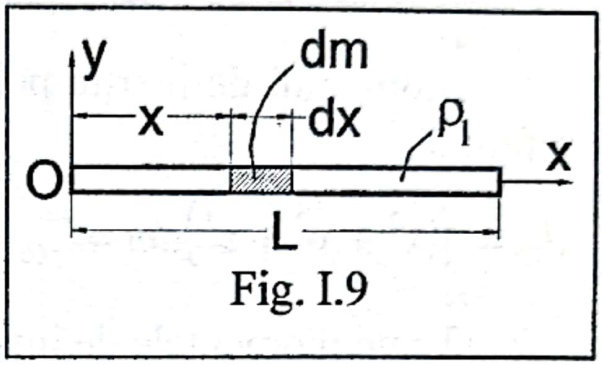


Fig. I.9

Se consideră un element de lungime infinit mic, de lungime dx și de masă $dm = \rho_l dx$. Bara fiind situată pe axa Ox, coordonatele y și z, ale centrului de masă pentru elementul infinitezimal, sunt zero: $(x, y, z) = (x, 0, 0)$. Masa M a întregii bare, considerând densitatea ca fiind densitate de suprafață ρ_l, este: $M = \rho_l L$

Momentele de inerție planare, față de planele sistemului de referință:

$$J_{xOy} = \int_M z^2 dm = 0 \qquad \text{(I.32)}$$

$$J_{yOz} = \int_M x^2 dm = \int_M x^2 \rho_l dx = \rho_l \int_0^L x^2 dx = \rho_l \frac{L^3}{3} = M\frac{L^2}{3} \qquad \text{(I.33)}$$

$$J_{xOz} = \int_M y^2 dm = 0 \qquad \text{(I.34)}$$

Momentele de inerție axiale față de axele sistemului de referință:

Scanned with OKEN Scanner

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2) dm = J_{xOz} + J_{xOy} = 0 \quad \text{(I.35)}$$

$$J_y = \int_M (x^2 + z^2) dm = J_{yOz} + J_{xOy} = M\frac{L^2}{3} \quad \text{(I.36)}$$

$$J_z = \int_M (x^2 + y^2) dm = J_{yOz} + J_{xOz} = M\frac{L^2}{3} \quad \text{(I.37)}$$

Momentul de inerție polar față de originea sistemului de referință:

$$J_O = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) dm = J_{yOz} + J_{xOz} + J_{xOy} = M\frac{L^2}{3} \quad \text{(I.38)}$$

Toate momentele de inerție centrifugale sunt nule.

$$J_{xy} = \int_M xy dm = 0 \quad \text{(I.39)}$$

$$J_{yz} = \int_M yz dm = 0 \quad \text{(I.40)}$$

$$J_{zx} = \int_M zx dm = 0 \quad \text{(I.41)}$$

Bară sub formă de arc de cerc

Fie un arc de cerc cu deschiderea la centru 2α, de rază R şi cu densitatea de lungime ρ_l (Fig. I.10).

Se cer momentele de inerție planare, axiale, momentul de inerție polar față de originea sistemului de referință şi momentele de inerție centrifugale:

$$\begin{cases} J_{xQy}, J_{yQz}, J_{xQz}, \\ J_x, J_y, J_z \\ J_Q \\ J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de masă al unui element infinit mic al barei sunt:
$(x, y, z) = (R\cos\beta, R\sin\beta, 0)$.
Elementul de masă este dat de expresia: $dm = \rho_l dl = \rho_l R d\beta$.

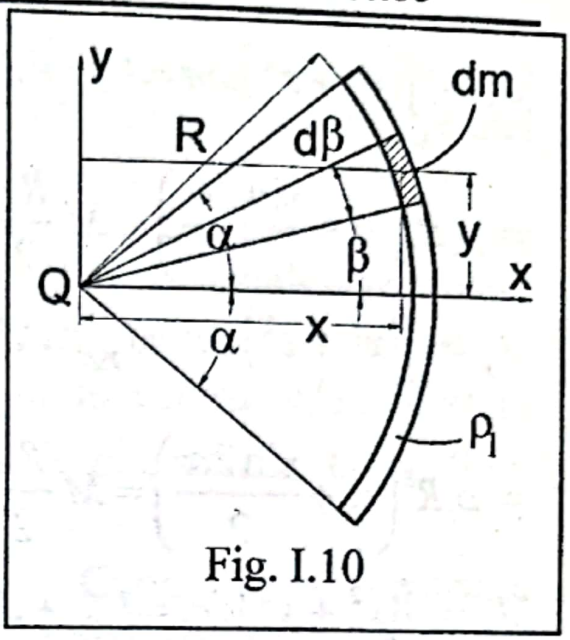


Fig. I.10

Masa întregii bare este $M = \rho_l R 2\alpha$

Momentele de inerţie planare, faţă de planele xQy, yQz, xQz:

$$J_{xQy} = \int_M z^2 dm = 0 \qquad (I.42)$$

$$J_{yQz} = \int_M x^2 dm = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2(\cos^2\beta)\rho_l R d\beta = \rho_l R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos^2\beta)d\beta =$$

$$= \rho_l R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1+\cos 2\beta}{2}d\beta = \rho_l R^3\left[\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{1}{2}d\beta + \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos 2\beta)d\beta\right] =$$

$$= \rho_l R^3\left(\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\beta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = \rho_l R^3\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = M\frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \qquad (I.43)$$

$$J_{xQz} = \int_M y^2 dm = \int_M R^2(\sin^2\beta)\rho_l R d\beta = \rho_l R^3 \int_M(\sin^2\beta)d\beta =$$

$$= \rho_l R^3 \int_M \frac{1-\cos 2\beta}{2}d\beta = \rho_l R^3\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = M\frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \qquad (I.44)$$

Momentele de inerţie axiale, faţă de axele sistemului de referinţă:

Scanned with OKEN Scanner

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2)dm = J_{xQz} + J_{xQy} =$$

$$= \rho_l R^3 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = M\frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \quad (I.45)$$

$$J_y = \int_M (x^2 + z^2)dm = J_{yQz} + J_{xQy} =$$

$$= \rho_l R^3 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = M\frac{R^2}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \quad (I.46)$$

$$J_z = \int_M (x^2 + y^2)dm = J_{yQz} + J_{xQz} =$$

$$= \rho_l R^3 \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) + \rho_l R^3 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right) = 2\alpha\rho_l R^3 = MR^2 \quad (I.47)$$

Momentul de inerţie polar, faţă de originea sistemului de referinţă:

$$J_Q = \int_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dm = J_{yQz} + J_{xQz} + J_{xQy} = 2\alpha\rho_l R^3 = MR^2 \quad (I.48)$$

Momentele de inerţie centrifugale în raport cu două axe ale sistemului de referinţă:

$$J_{yz} = \int_M yzdm = 0 \quad (I.49)$$

$$J_{zx} = \int_M zxdm = 0 \quad (I.50)$$

$$J_{xy} = \int_M xydm = \int_{-\alpha}^{\alpha} R(\cos\beta)R(\sin\beta)\rho_l R d\beta = \rho_l R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2}(\sin 2\beta)d\beta =$$

$$= \frac{\rho_l R^3}{2}\left(-\frac{\cos 2\beta}{2}\Big|_{-\alpha}^{\alpha}\right) = \frac{\rho_l R^3}{4} \cdot 0 = 0 \quad (I.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

Obs. Dacă una dintre cele două axe, faţă de care se calculează momentul centrifugal, este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal este zero.

Momentele de inerţie centrifugale primesc semn spre deosebire de momentele de inerţie planare, axiale sau polare care sunt pozitive totdeauna. Pentru exemplificare putem considera un arc de cerc, de unghi la centru $\pi/2$, aflat în primul cadran al sistemului de axe de coordonate *Oxyz* (Fig. I.11).

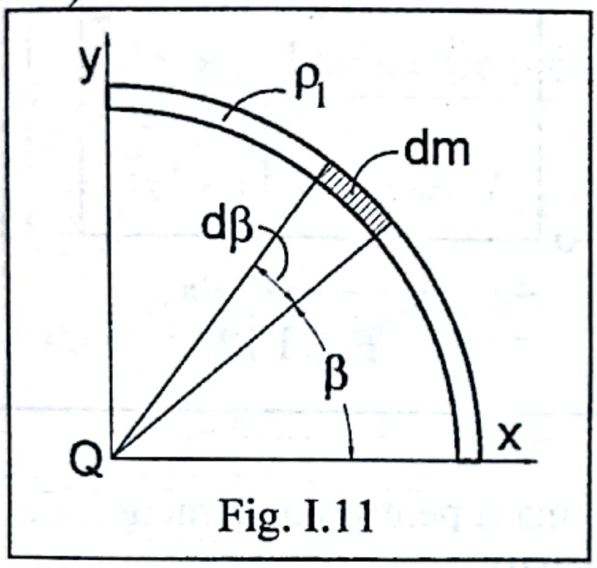


Fig. I.11

Coordonatele centrului de masă pentru un element infinit mic din bară sunt: $(x, y, z) = (R\cos\beta, R\sin\beta, 0)$. Elementul de masă este dat de expresia:

$$dm = \rho_l dl = \rho_l R d\beta$$

Masa întregului arc de cerc fiind: $M = \frac{\pi}{2}\rho_l R$

$$J_{yz} = \int_M yz dm = 0 \qquad \text{(I.52)}$$

$$J_{xy} = \int_M xy dm = \int_0^{\pi/2} R(\cos\beta)R(\sin\beta)\rho_l R d\beta = \rho_l R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\sin 2\beta)d\beta =$$

$$= \frac{\rho_l R^3}{2}\left(-\frac{\cos 2\beta}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right) = -\frac{\rho_l R^3}{4} = -M\frac{R^2}{2\pi} \qquad \text{(I.53)}$$

$$J_{zx} = \int_M zx dm = 0 \qquad \text{(I.54)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Placă plană dreptunghiulară

Se cunosc dimensiunile geometrice ale plăcii b,h precum și densitatea de suprafață ρ_s (Fig. I.12).

Se cer momentele de inerție planare, axiale, polar și momentele de inerție centrifugale față de sistemul xOy și față de sistemul x^*Gy^*.

A. Față de sistemul xOy:

$$\begin{cases} J_{xOy}, J_{yOz}, J_{xOz}, \\ J_x, J_y, J_z \\ J_O \\ J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} \end{cases}$$

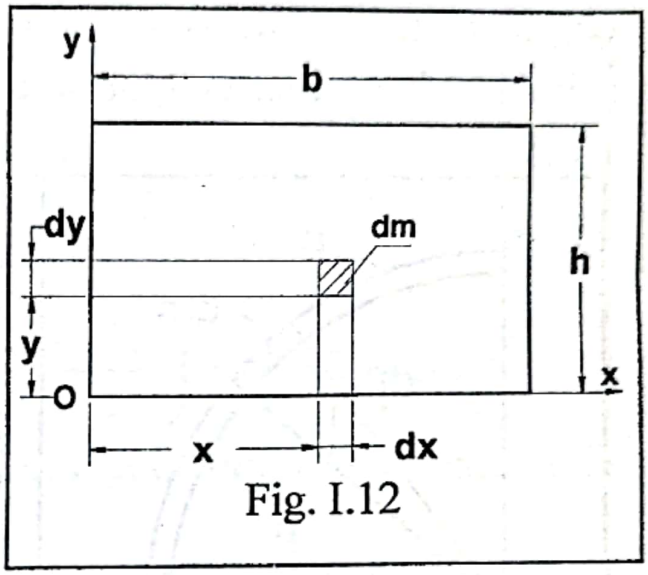


Fig. I.12

Coordonatele centrului de masă pentru un element infinit mic din placă sunt: $(x,y,z)=(x,y,0)$.

Elementul de masă este dat de expresia: $dm=\rho_s ds=\rho_s dxdy$ iar masa întregii plăcii este $M=\rho_s bh$.

Momentele de inerție planare, față de planele sistemului de referință:

$$J_{xOy}=\int_M z^2 dm=0 \tag{I.55}$$

$$J_{yOz}=\int_M x^2 dm=\int_M x^2\rho_s dxdy=\rho_s\int_0^b x^2dx\int_0^h dy=\rho_s\frac{b^3}{3}h=M\frac{b^2}{3} \tag{I.56}$$

$$J_{xOz}=\int_M y^2 dm=\int_M y^2\rho_s dxdy=\rho_s\int_0^b dx\int_0^h y^2dy=\rho_s b\frac{h^3}{3}=M\frac{h^2}{3} \tag{I.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerție axiale, față de axele sistemului de referință:

$$J_x = \int_M (y^2 + z^2)dm = J_{xOz} + J_{xOy} = \rho_s b\frac{h^3}{3} = M\frac{h^2}{3} \quad \text{(I.58)}$$

$$J_y = \int_M (x^2 + z^2)dm = J_{yOz} + J_{xOy} = \rho_s \frac{b^3}{3}h = M\frac{b^2}{3} \quad \text{(I.59)}$$

$$J_z = \int_M (x^2 + y^2)dm = J_{yOz} + J_{xOz} = \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{3} = M\frac{b^2+h^2}{3} \quad \text{(I.60)}$$

Momentul de inerție polar, față de originea sistemului de referință:

$$J_O = \int_M (x^2 + y^2 + z^2)dm = J_{yOz} + J_{xOz} + J_{xOy} =$$

$$= \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{3} = M\frac{b^2+h^2}{3} \quad \text{(I.61)}$$

Momentele de inerție centrifugale față de axele sistemului de referință:

$$J_{yz} = \int_M yzdm = 0 \quad \text{(I.62)}$$

$$J_{xy} = \int_M xydm = \int_M xy\rho_s dxdy = \rho_s \int_0^b xdx \int_0^h ydy =$$

$$= \rho_s \frac{b^2}{2}\frac{h^2}{2} = \rho_s \frac{b^2h^2}{4} = M\frac{bh}{4} \quad \text{(I.63)}$$

$$J_{zx} = \int_M zxdm = 0 \quad \text{(I.64)}$$

B. Se calculează momentele de inerție axiale, centrifugale și polar față de sistemul x^*Gy^* paralel cu sistemul xOy, cu originea în centrul de greutate G (Fig. I.13):

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} J_{x^*},\ J_{y^*},\ J_{z^*} \\ J_G \\ J_{x^*y^*},\ J_{y^*z^*},\ J_{x^*z^*} \end{cases}$$

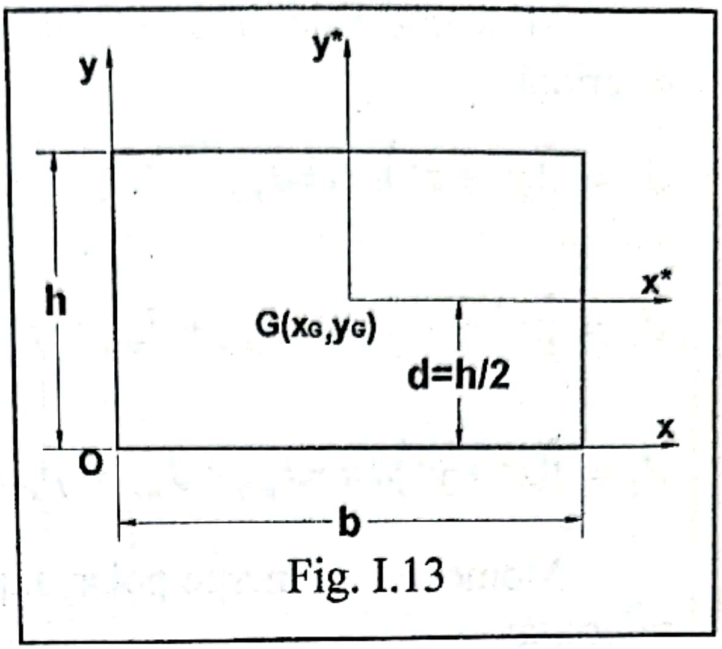


Fig. I.13

Pentru momentele axiale se aplică relaţia lui Steiner (I.7) în care Δ este axa Ox, axa ΔG este axa Gx^* iar distanţa d este $y_G = \frac{h}{2}$, cota centrului de greutate G:

$$J_x = J_{x^*} + M(y_G)^2$$

$$J_{x^*} = J_x - M(y_G)^2 = \rho_s \frac{bh^3}{3} - \rho_s bh\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\boxed{J_{x^*} = \rho_s \frac{bh^3}{12} = M\frac{h^2}{12}} \qquad (I.65)$$

Din $J_y = J_{y^*} + M(x_G)^2$ rezultă:

$$J_{y^*} = J_y - M(x_G)^2 = \rho_s \frac{b^3h}{3} - \rho_s bh\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\boxed{J_{y^*} = \rho_s \frac{b^3h}{12} = M\frac{b^2}{12}} \qquad (I.66)$$

Din relaţia lui Steiner: $J_z = J_{z^*} + M(OG)^2$ rezultă

$$J_{z^*} = J_z - M(OG)^2 = \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{3} - \rho_s bh\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

$$J_{z^*} = \rho_s bh\left(\frac{b^2+h^2}{12}\right) = M\frac{b^2+h^2}{12} \qquad \text{(I.67)}$$

Momentul polar se calculează cu relația lui Steiner (I.8) pentru momente de inerție polare: $J_O = J_G + M(OG)^2$

$$J_G = J_O - M(OG)^2 = \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{12} = M\frac{b^2+h^2}{12} \qquad \text{(I.68)}$$

Pentru momentele de inerție centrifugale se aplică relația (I.17) știind că $z_G = 0$. Din $J_{xy} = J_{x^*y^*} + x_G y_G \cdot M$ rezultă:

$$J_{x^*y^*} = J_{xy} - x_G y_G M = \rho_s\frac{b^2h^2}{4} - \rho_s\frac{b}{2}\frac{h}{2}\cdot bh = 0 \qquad \text{(I.69)}$$

Din $J_{yz} = J_{y^*z^*} + y_G z_G M$ se obține:

$$J_{y^*z^*} = J_{yz} - y_G z_G M = 0 \qquad \text{(I.70)}$$

din $J_{zx} = J_{z^*x^*} + z_G x_G M$ rezultă $J_{z^*x^*} = 0$ (I.71)

Placă plană triunghiulară

Se cunosc dimensiunile plăcii triunghiulare b și h precum și densitatea de suprafață ρ_s (Fig. I.14).

Se cer:

$$\begin{cases} J_{xOy}, J_{yOz}, J_{xOz} \\ J_x, J_y, J_z \\ J_O \\ J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} \end{cases}$$

Masa întregii plăci este $M = \rho_S\frac{bh}{2}$.

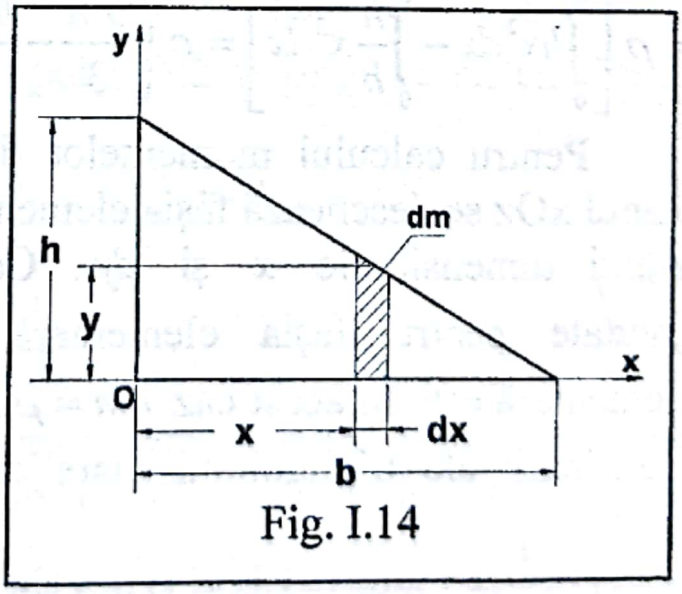


Fig. I.14

Scanned with OKEN Scanner

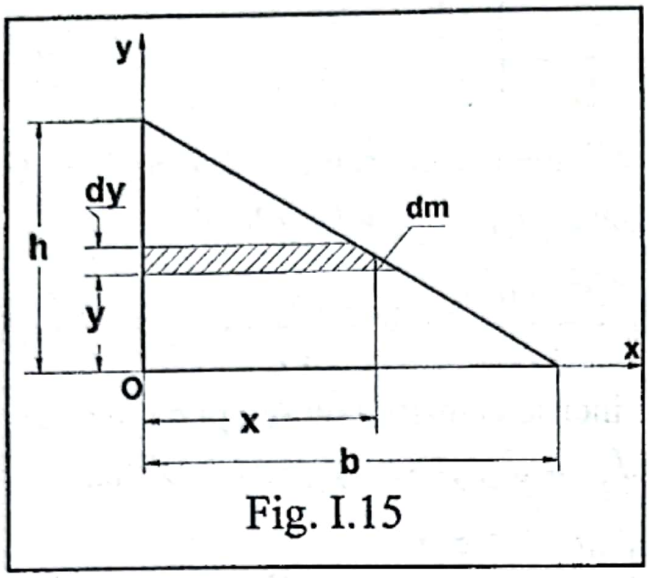


Fig. I.15

Elementul infinitezimal are coordonatele centrului de masă $(x, y/2, 0)$, aria $ds = ydx$ iar masa $dm = \rho_s ds = \rho_s y dx$.

Înălțimea y a elementului de arie ds, aflat la distanța x de axa Oy, se determină scriind raportul de asemănare:

$$\frac{y}{h} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow y = \frac{h}{b}(b-x)$$

Expresia $y = y(x)$ determinată astfel o vom utiliza în continuare pentru a calcula momentele de inerție mecanice în raport cu planul yOz.

$$J_{yOz} = \int_M x^2 dm = \int_M x^2 \rho_s y\, dx = \rho_s \int_0^b x^2 \left[\frac{h}{b}(b-x)\right] dx =$$

$$= \rho_s \left[\int_0^b hx^2 dx - \int_0^b \frac{h}{b} x^3 dx\right] = \rho_s \left(\frac{b^3 h}{3} - \frac{b^3 h}{4}\right) = \rho_s \frac{b^3 h}{12} = M\frac{b^2}{6} \qquad \text{(I.72)}$$

Pentru calculul momentelor de inerție planare față de planul xOz se desenează fâșia elementară orizontală (Fig. I.15), având dimensiunile x și dy. Coordonatele centrului de greutate pentru fâșia elementară sunt $(x/2, y, 0)$. Masa elementară este în acest caz $dm = \rho_s x\, dy$. Scriind condițiile de asemănare ale triunghiului mare cu triunghiul de deasupra

Scanned with OKEN Scanner

porţiunii haşurate, $\frac{h}{h-y}=\frac{b}{x}$ rezultă lungimea fâşiei elementare $x=\frac{b}{h}(h-y)$

$$J_{xOz}=\int_M y^2 dm=\int_M y^2\rho_s x dy=\rho_s\int_0^h y^2\left[\frac{b}{h}(h-y)\right]dy=$$

$$=\rho_s\left[\int_0^h by^2dy-\int_0^h\frac{b}{h}y^3dy\right]=\rho_s\left(\frac{bh^3}{3}-\frac{bh^3}{4}\right)=\rho_s\frac{bh^3}{12}=M\frac{h^2}{6} \quad (I.73)$$

$$J_{xOy}=\int_M z^2dm=0 \quad (I.74)$$

Momentele de inerţie axiale, faţă de axele sistemului de referinţă:

$$J_x=\int_M\left(y^2+z^2\right)dm=J_{xOz}+J_{xOy}=\rho_s\frac{bh^3}{12}=M\frac{h^2}{6} \quad (I.75)$$

$$J_y=\int_M\left(x^2+z^2\right)dm=J_{yOz}+J_{xOy}=\rho_s\frac{b^3h}{12}=M\frac{b^2}{6} \quad (I.76)$$

$$J_z=\int_M\left(x^2+y^2\right)dm=J_{yOz}+J_{xOz}=\rho_s bh\frac{\left(b^2+h^2\right)}{12}=M\frac{b^2+h^2}{6} \quad (I.77)$$

Momentul de inerţie polar faţă de originea sistemului de referinţă:

$$J_O=\int_M\left(x^2+y^2+z^2\right)dm=J_{xOy}+J_{yOz}+J_{xOz}=$$

$$=\rho_s bh\frac{\left(b^2+h^2\right)}{12}=M\frac{b^2+h^2}{6} \quad (I.78)$$

Momentele de inerţie centrifugale faţă de axele sistemului de referinţă, în care coordonatele centrului de greutate pentru fâşia verticală din (Fig. I.14) sunt $\left(x,\frac{y}{2},0\right)$:

Scanned with OKEN Scanner

$$J_{xy} = \int_M x\frac{y}{2}dm = \int_M x\frac{y}{2}\rho_s y dx = \frac{\rho_s}{2}\int_0^b x\frac{h^2}{b^2}(b-x)^2 dx =$$

$$= \frac{\rho_s}{2}\frac{h^2}{b^2}\int_0^b x\left(b^2 - 2bx + x^2\right)dx = \frac{\rho_s}{2}\frac{h^2}{b^2}\left(\frac{b^4}{2} - \frac{2b^4}{3} + \frac{b^4}{4}\right) = \quad \text{(I.79)}$$

$$= \rho_s\frac{b^2h^2}{24} = M\frac{bh}{12}$$

$$J_{yz} = \int_M yzdm = 0 \quad \text{(I.80)}$$

$$J_{zx} = \int_M zxdm = 0 \quad \text{(I.81)}$$

B. Se calculează pentru placa plana triunghiulară momentele de inerţie axiale, centrifugale şi polar faţă de sistemul x^*Gy^* paralel cu sistemul xOy, sistem cu originea în centrul de greutate G (Fig. I.16):

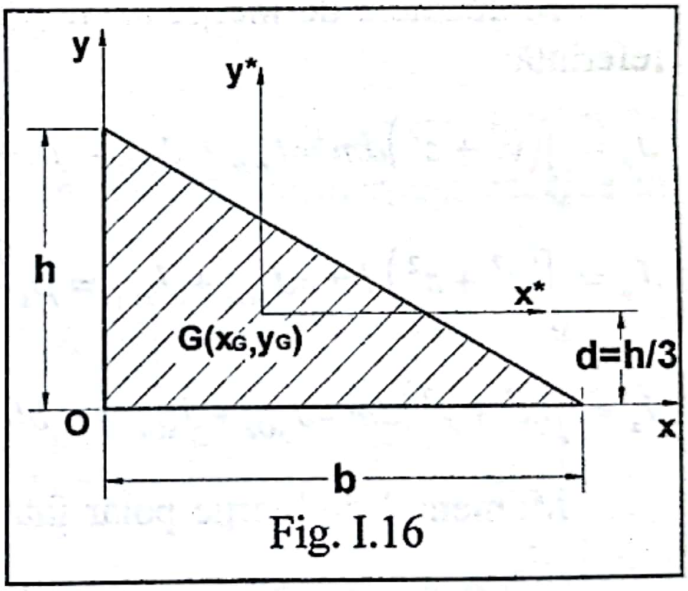


Fig. I.16

$$\begin{cases} J_{x^*}, J_{y^*}, J_{z^*} \\ J_G \\ J_{x^*y^*}, J_{y^*z^*}, J_{x^*z^*} \end{cases}$$

Pentru momentele axiale se aplică relaţia lui Steiner (I.7) în care Δ este axa Ox, axa ΔG este axa Gx^* iar distanţa d este y_G, cota centrului de greutate G.

$$J_x = J_{x^*} + M(y_G)^2 \Rightarrow J_{x^*} = J_x - M(y_G)^2 = \rho_s\frac{bh^3}{12} - \rho_s\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\boxed{J_{x'} = \rho_s \frac{bh^3}{36} = M\frac{h^2}{18}} \qquad (I.82)$$

$$J_y = J_{y'} + M(x_G)^2 \Rightarrow J_{y'} = J_y - M(x_G)^2 = \rho_s \frac{b^3 h}{12} - \rho_s \frac{bh}{2}\left(\frac{b}{3}\right)^2$$

$$\boxed{J_{y'} = \rho_s \frac{b^3 h}{36} = M\frac{b^2}{18}} \qquad (I.83)$$

$$J_z = J_{z'} + M(OG)^2$$

$$J_{z'} = J_z - M(OG)^2 = \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{12} - \rho_s \frac{bh}{2}\left[\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2\right]$$

$$\boxed{J_{z'} = \rho_s bh\left(\frac{b^2+h^2}{36}\right) = M\frac{b^2+h^2}{18}} \qquad (I.84)$$

Momentul faţă de polul O se calculează cu relaţia lui Steiner (I.8) pentru momente de inerţie polare: $J_O = J_G + M(OG)^2$

$$J_G = J_O - M(OG)^2 = \rho_s bh\frac{(b^2+h^2)}{12} - \rho_s \frac{bh}{2}\left[\left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{h}{3}\right)^2\right]$$

$$J_G = \rho_s bh\left(\frac{b^2+h^2}{36}\right) = M\frac{b^2+h^2}{18}$$

Pentru momentele de inerţie centrifugale se aplică relaţia (I.17) ştiind că $z_G = 0$. Din $J_{xy} = J_{x'y'} + x_G y_G \cdot M$ rezultă:

$$J_{x'y'} = J_{xy} - x_G y_G M = \rho_s \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b}{3}\frac{h}{3}\rho_s \frac{bh}{2} = -\rho_s \frac{b^2h^2}{72} = -M\frac{bh}{36} \qquad (I.85)$$

Pentru triunghiurile dreptunghice care au catetele pe axele Ox şi Oy iar ipotenuzele în primul sau în al treilea cadran rezultă semnul minus la momentul de inerţie centrifugal, faţă

Scanned with OKEN Scanner

de axe care trec prin centru de greutate al triunghiului. Pentru triunghiurile aşezate astfel încât ipotenuzele sunt în cadranele doi şi patru, semnul momentului de inerţie centrifugal este plus.

Din $J_{yz} = J_{y'z'} + y_G z_G M$ rezultă $J_{y'z'} = J_{yz} - y_G z_G M = 0$ (I.86)

Din $J_{zx} = J_{z'x'} + z_G x_G M$ rezultă $J_{z'x'} = 0$ (I.87)

Placă sub formă de sector de cerc

Fie o placă de forma unui sector de cerc având unghiul la centru α , raza R şi densitatea de suprafaţă ρ_s (Fig. I.17).

Se cer: $\begin{cases} J_{xQy}, J_{yQz}, J_{xQz}, \\ J_x, J_y, J_z \\ J_Q \\ J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} \end{cases}$

Masa întregii plăci este $M = \dfrac{\rho_s \alpha R^2}{2}$, calculată prin regula de trei simplă:

Unghiul în radiani	Masa
2π	$\rho_s \pi R^2$
α	M

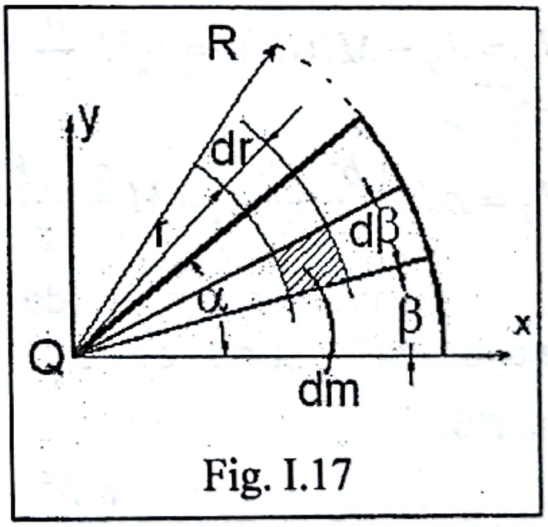


Fig. I.17

Se delimitează, în coordonate polare, un element infinit mic de dimensiuni dr şi $r \cdot d\beta$. Elementul se poate asimila cu un dreptunghi. Masa dreptunghiului infinitezimal este

$$dm = \rho_s ds = \rho_s \cdot dr \cdot r\, d\beta$$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de masă pentru elementul infinit mic din placă sunt: $(x,y,z)=(r\cos\beta, r\sin\beta, 0)$.

Momentele de inerţie planare, faţă de planele sistemului de referinţă:

$$J_{xQy}=\int_M z^2 dm = 0 \tag{I.88}$$

$$J_{yQz}=\int_M x^2 dm=\int_M r^2\left(\cos^2\beta\right)\rho_s r\cdot dr\cdot d\beta=$$

$$=\rho_s\int_0^R r^3 dr\int_0^\alpha\left(\cos^2\beta\right)\cdot d\beta=$$

$$=\rho_s\frac{R^4}{4}\int_0^\alpha\frac{1+\cos 2\beta}{2}d\beta=\rho_s\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)= \tag{I.89}$$

$$=\rho_s\frac{\alpha R^4}{8}\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)=M\frac{R^2}{4}\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$J_{xQz}=\int_M y^2 dm=\int_M r^2\left(\sin^2\beta\right)\rho_s r\cdot dr\cdot d\beta=$$

$$=\rho_s\int_0^R r^3 dr\int_0^\alpha\left(\sin^2\beta\right)\cdot d\beta=\rho_s\frac{R^4}{4}\int_0^\alpha\frac{1-\cos 2\beta}{2}d\beta= \tag{I.90}$$

$$=\rho_s\frac{R^4}{4}\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)=\rho_s\frac{\alpha R^4}{8}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)=$$

$$=M\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

Momentele de inerţie axiale, faţă de axele sistemului de referinţă:

$$J_x=\int_M\left(y^2+z^2\right)dm=J_{xQz}+J_{xQy}=M\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \tag{I.91}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$J_y = \int_M \left(x^2 + z^2\right) dm = J_{yQz} + J_{xQy} = M\frac{R^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \tag{I.92}$$

$$J_z = \int_M \left(x^2 + y^2\right) dm = J_{yQz} + J_{xQz} = M\frac{R^2}{2} \tag{I.93}$$

Momentul de inerție față de polul Q:

$$J_Q = \int_M \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm = J_{yQz} + J_{xQz} + J_{xQy} = M\frac{R^2}{2} \tag{I.94}$$

Momentele de inerție centrifugale față de axele sistemului de referință:

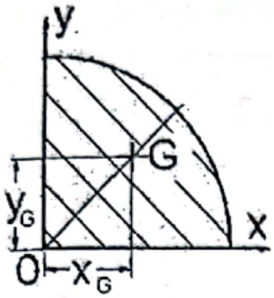
$$J_{yz} = \int_M yz dm = 0 \tag{I.95}$$

$$J_{zx} = \int_M zx dm = 0 \tag{I.96}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \int_M xy dm = \int_M r(\cos\beta)\cdot r(\sin\beta)\cdot \rho_s \cdot r \cdot dr \cdot d\beta = \\ &= \rho_s \int_0^R r^3 dr \int_0^\alpha \frac{1}{2}(\sin 2\beta)\, d\beta = \frac{\rho_s R^4}{4}\left(-\frac{\cos 2\beta}{2}\Big|_0^\alpha\right) = \\ &= -\frac{\rho_s R^4}{8}(\cos 2\alpha - 1) = \frac{\rho_s R^4}{8}(1 - \cos 2\alpha) = \\ &= \frac{\rho_s \alpha R^4}{8}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right) = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{I.97}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momente de inerţie pentru sectoare circulare particulare



Sfert de cerc: raza R, $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$M = \frac{\rho_s \alpha R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^2}{4}$$

$$J_x = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin \pi}{\pi}\right) =$$

$$= M\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^2}{4}\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^4}{16}$$

$J_y = J_x$ din motive de simetrie;

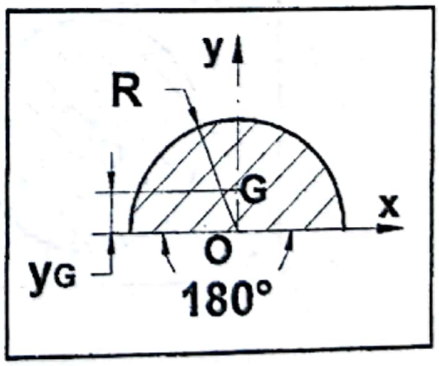
$$J_{xy} = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right) = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos \pi}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{MR^2}{\pi} = \frac{\rho_s \pi R^2}{4}\frac{R^2}{\pi} = \frac{\rho_s R^4}{4}$$

$$J_Q = J_x + J_y = M\frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^2}{4}\frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^4}{8}$$

Semicerc: raza R, $\alpha = \pi$, $M = \frac{\rho_s \alpha R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^2}{2}$

$$J_x = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\pi}{2\pi}\right) =$$

$$= M\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^2}{2}\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^4}{8}$$



$J_y = J_x$ din motive de simetrie

$$J_{xy} = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right) = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos 2\pi}{\pi}\right) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

$$J_Q = J_x + J_y = M\frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^2}{2}\frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^4}{4}$$

Axa Oy este axă de simetrie.

Cerc: raza R, $\alpha = 2\pi$, $x_G = y_G = 0$

$$M = \frac{\rho_s \alpha R^2}{2} = \rho_s \pi R^2$$

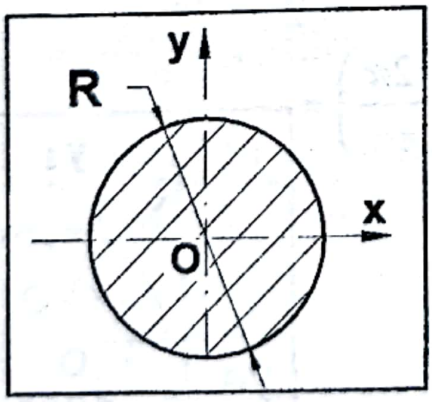
$J_y = J_x$ din motive de simetrie;

$$J_x = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) = M\frac{R^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 4\pi}{4\pi}\right) =$$

$$= M\frac{R^2}{4} = \rho_s \pi R^2 \frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^4}{4}$$

$J_{xy} = 0$ axele Ox și Oy sunt axe de simetrie;

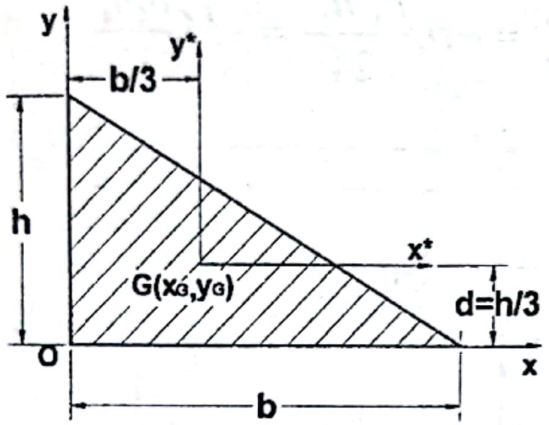
$$J_Q = J_x + J_y = M\frac{R^2}{2} = \rho_s \pi R^2 \frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^4}{2}$$



Scanned with OKEN Scanner

I.5. Momente de inerție folosite în problemele propuse

Placă în formă de triunghi dreptunghic



$$M = \rho_S \frac{bh}{2}$$

$$G\left(b/3, h/3\right)$$

$$J_x = \rho_s \frac{bh^3}{12} = M\frac{h^2}{6}; \qquad J_y = \rho_s \frac{b^3h}{12} = M\frac{b^2}{6};$$

$$J_{xy} = \rho_s \frac{b^2h^2}{24} = M\frac{bh}{12}; J_{x^*} = \rho_s \frac{bh^3}{36} = M\frac{h^2}{18}; \quad J_{y^*} = \rho_s \frac{b^3h}{36} = M\frac{b^2}{18};$$

$$J_{x^*y^*} = -\rho_s \frac{b^2h^2}{72} = -M\frac{bh}{36}$$

Semnul momentului centrifugal, față de axele sistemului Gx^*y^* care trec prin centrul de greutate al triunghiului, se schimbă odată cu poziția triunghiului față de sistemul de referință Oxy:

$$J_{x_1^*y_1^*} = -\rho_s \frac{b_1^2h_1^2}{72} = -M\frac{b_1h_1}{36}; \qquad J_{x_2^*y_2^*} = \rho_s \frac{b_2^2h_2^2}{72} = M\frac{b_2h_2}{36}$$

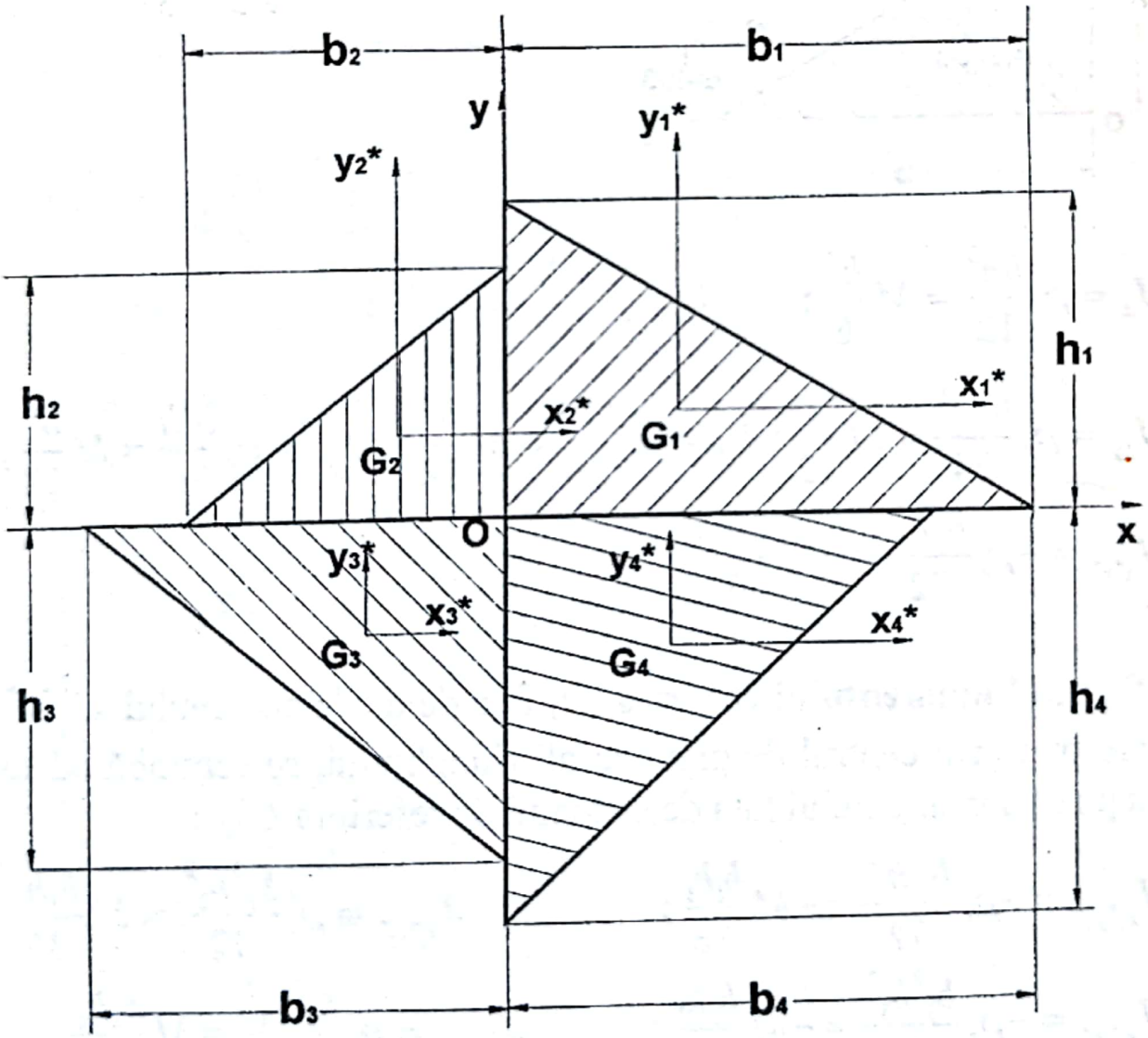
$$J_{x_3^*y_3^*} = -\rho_s \frac{b_3^2h_3^2}{72} = -M\frac{b_3h_3}{36}; \qquad J_{x_4^*y_4^*} = \rho_s \frac{b_4^2h_4^2}{72} = M\frac{b_4h_4}{36}$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerţie centrifugale, faţă de sistemul *Oxy* îşi schimbă şi ele semnul odată cu schimbarea poziţiei triunghiului:

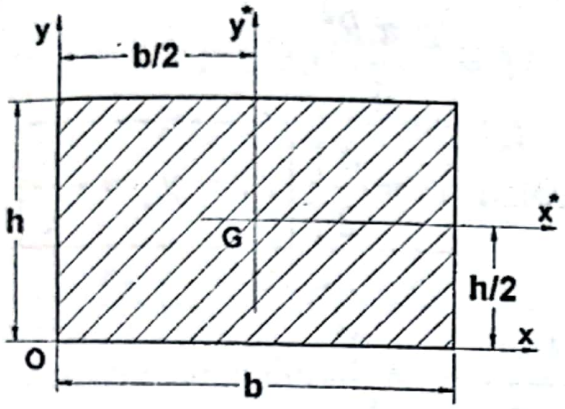
$$J_{xy}^{(1)} = \rho_s \frac{b_1^2 h_1^2}{24} = M \frac{b_1 h_1}{12}; \qquad J_{xy}^{(2)} = -\rho_s \frac{b_2^2 h_2^2}{24} = -M \frac{b_2 h_2}{12}$$

$$J_{xy}^{(3)} = \rho_s \frac{b_3^2 h_3^2}{24} = M \frac{b_3 h_3}{12}; \qquad J_{xy}^{(4)} = -\rho_s \frac{b_4^2 h_4^2}{24} = -M \frac{b_4 h_4}{12}$$



Scanned with OKEN Scanner

Placa de formă dreptunghiulară



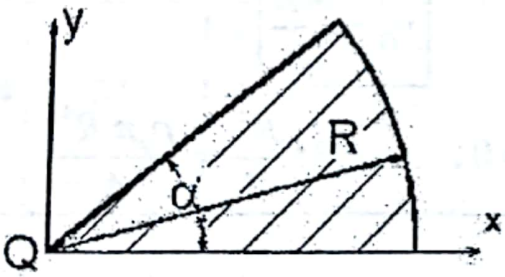
$$M = \rho_s bh$$

$$G\left(b/2, h/2\right)$$

$$J_x = \rho_s b\frac{h^3}{3} = M\frac{h^2}{3};\ J_y = \rho_s \frac{b^3}{3}h = M\frac{b^2}{3};\ J_{xy} = \rho_s \frac{b^2h^2}{4} = M\frac{bh}{4}$$

$$J_{x^*} = \rho_s \frac{bh^3}{12} = M\frac{h^2}{12};\ J_{y^*} = \rho_s \frac{b^3h}{12} = M\frac{b^2}{12};\ J_{x^*y^*} = 0$$

Placă în formă de sector circular



raza R, $M = \dfrac{\rho_s \alpha R^2}{2}$,

unghi la centru $\boxed{\alpha}$

$$\boxed{x_G = \frac{2}{3}\frac{R\sin\alpha}{\alpha}}$$

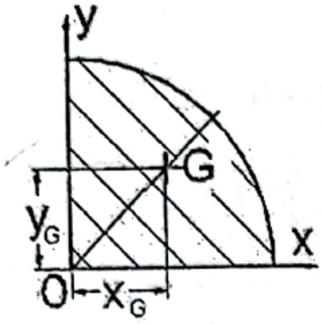
$$\boxed{y_G = \frac{2}{3}\frac{R(1-\cos\alpha)}{\alpha}}$$

$$J_x = M\frac{R^2}{4}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right);\quad J_y = M\frac{R^2}{4}\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$$

$$J_Q = M\frac{R^2}{2};\quad J_{xy} = \frac{\rho_s R^4}{8}(1-\cos 2\alpha) = \frac{MR^2}{4}\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{\alpha}\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

Placă în formă de sfert de cerc

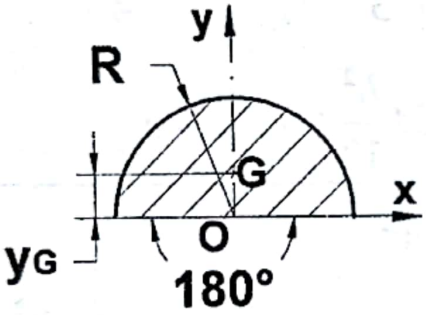


raza R, $M = \dfrac{\rho_s \pi R^2}{4}$

Unghi la centru $\boxed{\alpha = \dfrac{\pi}{2}}$; $\boxed{x_G = y_G = \dfrac{4R}{3\pi}}$

$$J_x = M\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^4}{16} = J_y; \qquad J_{xy} = \frac{MR^2}{\pi} = \frac{\rho_s R^4}{4}$$

Placă în formă de semicerc



raza R, unghi la centru $\boxed{\alpha = \pi}$,

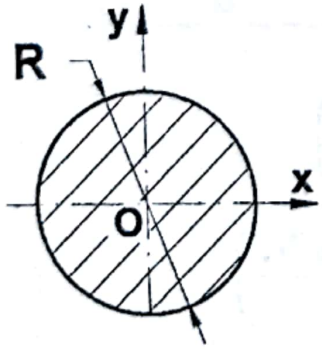
$M = \dfrac{\rho_s \pi R^2}{2}$

$\boxed{x_G = 0}$

$\boxed{y_G = \dfrac{4R}{3\pi}}$

$$J_x = M\frac{R^2}{4} = \frac{\rho_s \pi R^4}{8} = J_y; \quad J_{xy} = 0; \quad J_Q = M\frac{R^2}{2} = \frac{\rho_s \pi R^4}{4}$$

Placă circulară



$\boxed{\alpha = 2\pi}$; $\boxed{x_G = y_G = 0}$

$M = \rho_s \pi R^2$

$J_x = M\dfrac{R^2}{4} = \dfrac{\rho_s \pi R^4}{4} = J_y$

$J_{xy} = 0$

Scanned with OKEN Scanner

II. MOMENTE DE INERȚIE PENTRU PLĂCI PLANE FORMATE DIN DREPTUNGHIURI

II.1. Exemplu de calcul

Să se calculeze momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa omogenă din figură, atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii. Axa $Gx^* \parallel Ox$ și axa $Gy^* \parallel Oy$.

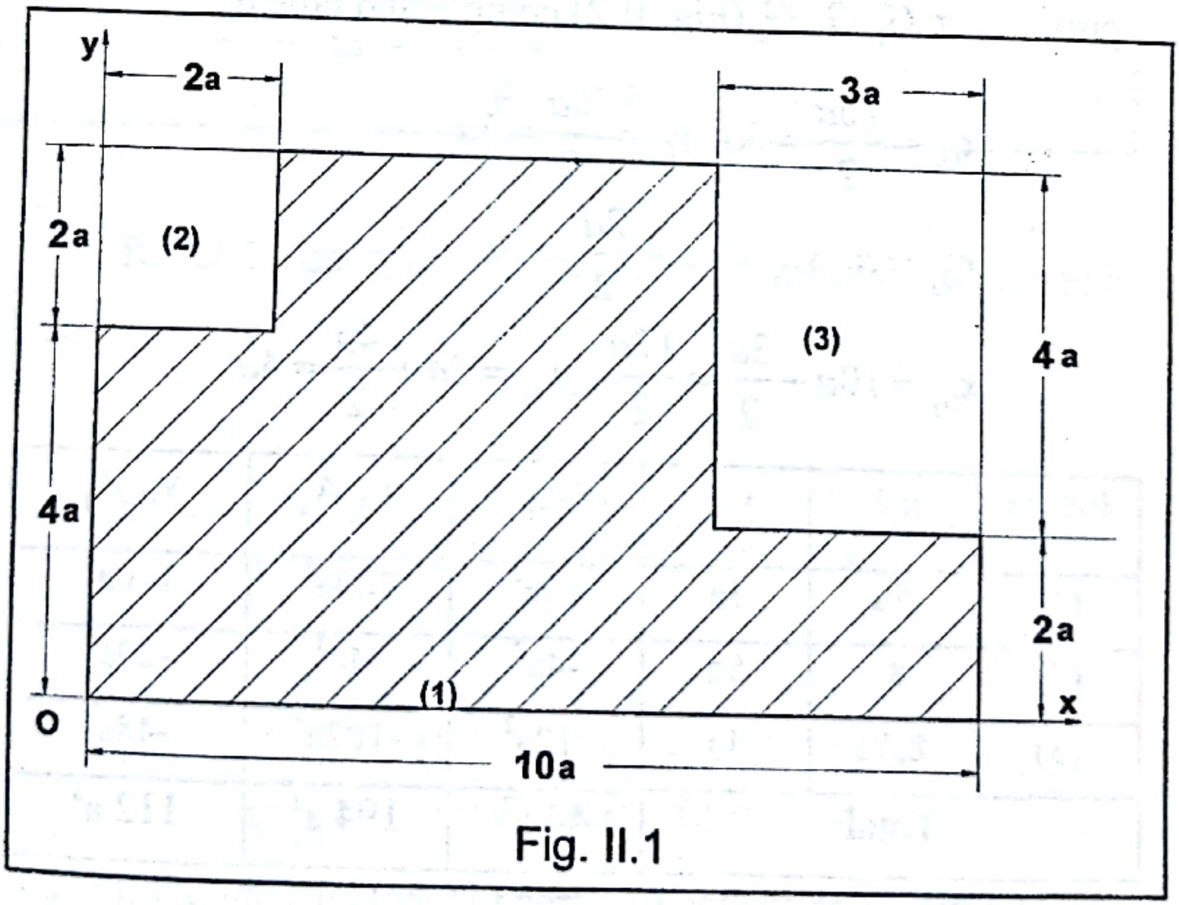


Fig. II.1

Scanned with OKEN Scanner

Dimensiunile sunt indicate în desen, unde a reprezintă ordinul de mărime pentru lungimi (Fig. II.1):

II.1.1. Împărţirea plăcii în figuri elementare.

Se observă că placa se poate împărţi în trei figuri dreptunghiulare după cum urmează: (1) – dreptunghi mare plin, de laturi 10a şi 6a; (2) – pătrat decupat, de latură 2a; (3) – dreptunghi decupat, de laturi 3a şi 4a. Prima latură este latura orizontală, a doua latură este cea verticală.

II.1.2. Se determină coordonatele centrului de greutate ale plăcii în reperul Oxy.

Se scriu coordonatele centrelor de greutate ale porţiunilor G_1, G_2, G_3 (Fig. II.2) completând tabelul :

$$x_{G_1} = \frac{10a}{2} = 5a,\ y_{G_1} = \frac{6a}{2} = 3a$$

$$x_{G_2} = a,\ y_{G_2} = 6a - \frac{2a}{2} = 5a$$

$$x_{G_3} = 10a - \frac{3a}{2} = \frac{17a}{2},\ y_{G_3} = 2a + \frac{4a}{2} = 4a$$

Figura	x_{G_i}	y_{G_i}	A_i	$x_{G_i}A_i$	$y_{G_i}A_i$
(1)	5a	3a	$60a^2$	$300a^3$	$180a^3$
(2)	a	5a	$-4a^2$	$-4a^3$	$-20a^3$
(3)	8,5a	4a	$-12a^2$	$-102a^3$	$-48a^3$
Total			$44\ a^2$	$194\ a^3$	$112\ a^3$

Ariile porţiunilor decupate se trec în tabel cu semnul minus.

Scanned with OKEN Scanner

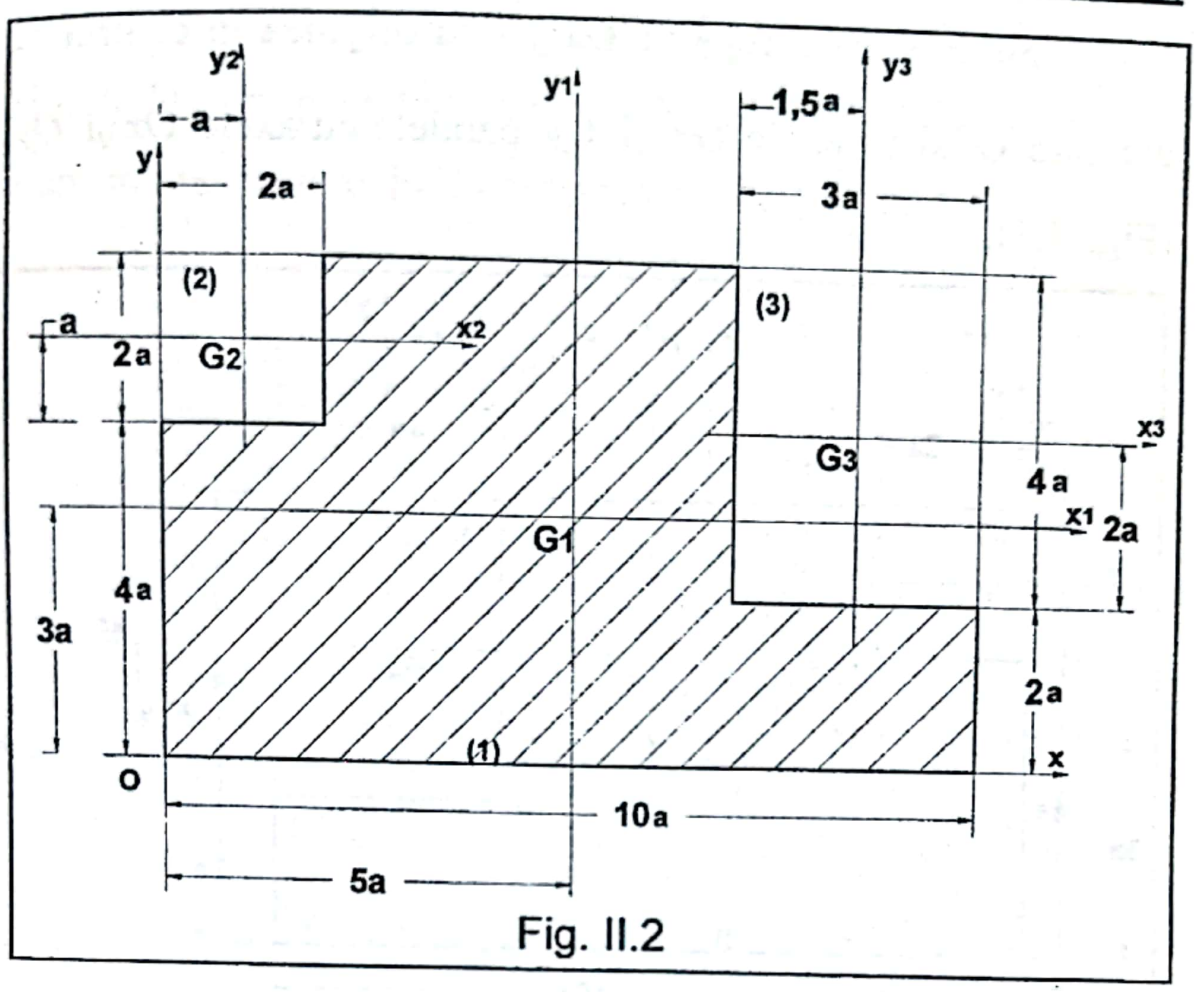


Fig. II.2

Rezultă coordonatele centrului de greutate al întregii plăci:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{300a^3 - 4a^3 - 102a^3}{60a^2 - 4a^2 - 12a^2} = \frac{194a^3}{44a^2} \approx 4{,}41a$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{180a^3 - 20a^3 - 48a^3}{60a^2 - 4a^2 - 12a^2} = \frac{112a^3}{44a^2} = 2{,}545a$$

Scanned with OKEN Scanner

Se desenează reperul Gx^*y^* cu originea în centrul de greutate G și cu axele Gx^* și Gy^* paralele cu axele Ox și Oy (Fig. II.3).

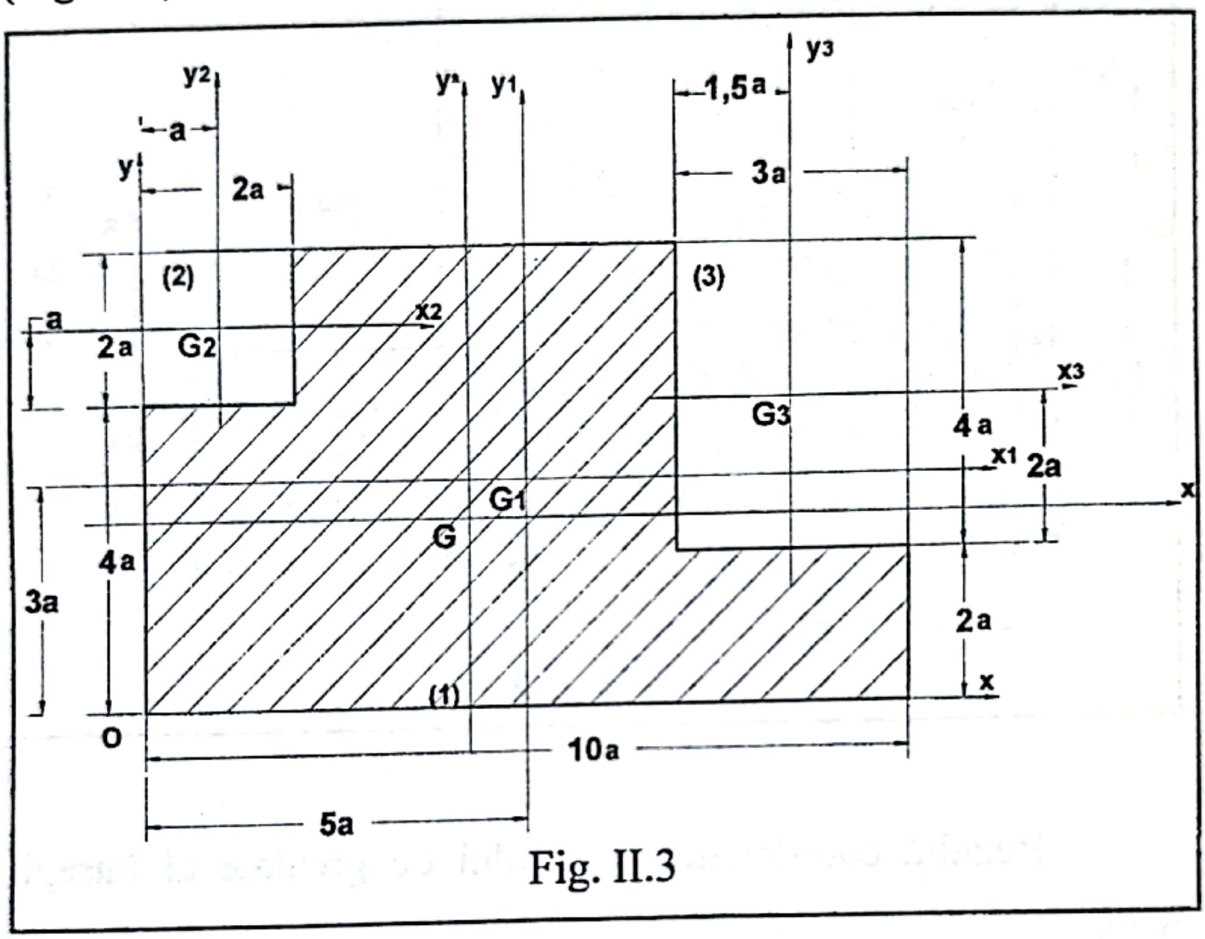


Fig. II.3

II.1.3. Momentele de inerție față de repere „proprii”

Notând $G_1x_1y_1$, $G_2x_2y_2$, $G_3x_3y_3$ reperele proprii ale fiecărei porțiuni, repere având originea în centrele de greutate ale porțiunilor și axele paralele cu axele reperului Oxy (Fig. II.2), se scriu momentele de inerție ale fiecărei porțiuni în raport cu axele reperului propriu. Laturile fiecărei porțiuni se

Scanned with OKEN Scanner

notează cu b (latura orizontală) şi cu h (latura verticală). Indicii şi cifrele din paranteze se referă la numărul de ordine al porţiunii respective. Se foloseşte tabelul I.5 (Cap. I).

Avem:

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{10a \cdot (6a)^3}{12} = 180\, a^4$$

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = \frac{(10a)^3 \cdot 6a}{12} = 500\, a^4$$

$$I_{x_1 y_1}^{(1)} = 0 \ (G_1x_1 \ \textit{si} \ G_1y_1 \ \textit{sunt axe de simetrie})$$

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{4}{3} a^4 = 1{,}33\, a^4$$

$$I_{y_2}^{(2)} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{(2a)^3 \cdot 2a}{12} = \frac{4}{3} a^4 = 1{,}33\, a^4$$

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = 0$$

$$I_{x_3}^{(3)} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{12} = 16\, a^4$$

$$I_{y_3}^{(3)} = \frac{b_3^3 h_3}{12} = \frac{(3a)^3 \cdot 4a}{12} = 9\, a^4$$

$$I_{x_3 y_3}^{(3)} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

II.1.4. Momentele de inerţie ale plăcii în raport cu axele reperului Gx^*y^*

Se pot aplica două metode: se calculează întâi momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Oxy, se însumează pentru întreaga placă şi se trece în reperul Gx^*y^*, folosind legile de variaţie ale momentelor de inerţie la translaţia axelor sau se calculează direct momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Gx^*y^* şi se însumează pentru întreaga placă.

Prima metodă

Se calculează momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Oxy:

$$I_x^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{10a \cdot (6a)^3}{3} = 720\,a^4$$

$$I_y^{(1)} = \frac{b_1^3 h_1}{3} = \frac{(10a)^3 \cdot 6a}{3} = 2000\,a^4$$

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{b_1^2 h_1^2}{4} = \frac{(10a)^2 \cdot (6a)^2}{4} = 900\,a^4$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A_2 y_{G_2}^2 = 1{,}33\,a^4 + 4a^2(5a)^2 = 101{,}33\,a^4$$

$$I_y^{(2)} = \frac{b_2^3 h_2}{3} = \frac{(2a)^3 \cdot 2a}{3} = 5{,}33\,a^4$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2 y_2}^{(2)} + A_2 x_{G_2} y_{G_2} = 4a^2 \cdot a \cdot 5a = 20a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_x^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + A_3 y_{G_3}^2 = 16a^4 + 12a^2(4a)^2 = 208a^4$$

$$I_y^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} + A_3 x_{G_3}^2 = 9a^4 + 12a^2(8{,}5a)^2 = 876a^4$$

$$I_{xy}^{(3)} = I_{x_3y_3}^{(3)} + A_3 x_{G_3} y_{G_3} = 12a^2 \cdot 8{,}5a \cdot 4a = 408a^4$$

Se calculează momentele de inerție ale întregii plăci în raport cu axele reperului Oxy:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 720a^4 - 101{,}33a^4 - 208a^4 = 410{,}66a^4$$
$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 2000a^4 - 5{,}33a^4 - 876a^4 = 1118{,}66a^4$$
$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 900a^4 - 20a^4 - 408a^4 = 472a^4$$

Se calculează momentele de inerție ale întregii plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*} = I_x - Ay_G^2 = 410{,}66a^4 - 44a^2(2{,}545a)^2 = 125{,}678\ a^4$$

$$I_{y^*} = I_y - Ax_G^2 = 1118{,}66a^4 - 44a^2.\ (4{,}410\ a)^2 = 262{,}950a^4$$

$$I_{x^*y^*} = I_{xy} - Ax_G y_G = 472a^4 - 44a^2.\ 4{,}410\ a \cdot 2{,}545a = -21{,}832a^4$$

A doua metodă

Se calculează momentele de inerție ale fiecărei porțiuni direct în raport cu axele reperului Gx^*y^*.

$$I_{x^*}^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + A_1(y_{G_1} - y_G)^2 = 180a^4 + 60a^2(3a - 2{,}545a)^2 = 192{,}421a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_{y^*}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + A_1(x_{G_1} - x_G)^2 = 500a^4 + 60a^2(5a - 4{,}410a)^2 = 520{,}886a^4$$

$$I_{x^*y^*}^{(1)} = I_{x_1y_1}^{(1)} + A_1(x_{G_1} - x_G)(y_{G_1} - y_G) =$$

$$= 60a^2(5a - 4{,}410a)(3a - 2{,}545a) = 16{,}107a^4$$

$$I_{x^*}^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A_2(y_{G_2} - y_G)^2 = 1{,}33a^4 + 4a^2(5a - 2{,}545a)^2 = 25{,}441a^4$$

$$I_{y^*}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A_2(x_{G_2} - x_G)^2 = 1{,}33a^4 + 4a^2(a - 4{,}41a)^2 = 47{,}845a^4$$

$$I_{x^*y^*}^{(1)} = I_{x_2y_2}^{(2)} + A_2(x_{G_2} - x_G)(y_{G_2} - y_G) =$$

$$= 4a^2(a - 4{,}41a)(5a - 2{,}545a) = -33{,}486a^4$$

$$I_{x^*}^{(3)} = I_{x_3}^{(1)} + A_3(y_{G_3} - y_G)^2 = 16a^4 + 12a^2(4a - 2{,}545a)^2 = 41{,}404a^4$$

$$I_{y^*}^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} + A_3(x_{G_3} - x_G)^2 = 9a^4 + 12a^2(8{,}5a - 4{,}410a)^2 = 209{,}737a^4$$

$$I_{x^*y^*}^{(1)} = I_{x_3y_3}^{(3)} + A_3(x_{G_3} - x_G)(y_{G_3} - y_G) =$$

$$= 12a^2(8{,}5a - 4{,}41a)(4a - 2{,}545a) = 71{,}411a^4$$

Se calculează momentele de inerție ale întregii plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*} = I_{x^*}^{(1)} - I_{x^*}^{(2)} - I_{x^*}^{(3)} = 192{,}421a^4 - 25{,}441a^4 - 41{,}404a^4 = 125{,}576a^4$$

$$I_{y^*} = I_{y^*}^{(1)} - I_{y^*}^{(2)} - I_{y^*}^{(3)} = 520{,}886a^4 - 47{,}845a^4 - 209{,}737a^4 = 263{,}304a^4$$

$$I_{x^*y^*} = I_{x^*y^*}^{(1)} - I_{x^*y^*}^{(2)} - I_{x^*y^*}^{(3)} = 16{,}107a^4 - (-33{,}486a^4) - 71{,}411a^4 = -21{,}818a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că pentru momentele de inerţie I_x^*, I_y^*, I_{xy}^* s-au obţinut aceleaşi valori prin cele două metode de calcul.

II.1.5. Unghiul θ de înclinare al axelor centrale principale de inerţie

Axele centrale principale de inerţie au fost notate (Δ_1) şi (Δ_2). S-au folosit rezultatele de la metoda întâia:

$$tg2\theta = \frac{2I_{x^*y^*}}{I_{y^*} - I_{x^*}} = \frac{2(-21{,}832)}{262{,}950 - 125{,}678} = -0{,}31808$$

$$\theta = \frac{1}{2} arctg(-0{,}31808) \equiv -8^o 47' 24''$$

Semnul unghiului fiind negativ, rotirea axelor se face in sens orar.

II.1.6. Momentele de inerţie centrale principale

Se calculează momentele de inerţie în raport cu axele $(\Delta_1) \equiv Gx'$ şi $(\Delta_2) \equiv Gy'$:

$$I_{\Delta_1} = I'_x = I_{x^*} \cdot \cos^2\theta + I_{y^*} \cdot \sin^2\theta - I_{x^*y^*} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{\Delta_2} = I'_y = I_{x^*} \cdot \sin^2\theta + I_{y^*} \cdot \cos^2\theta + I_{x^*y^*} \cdot \sin 2\theta$$

Avem: $\sin\theta = -0{,}1528, \quad \cos\theta = 0{,}9882, \quad \sin 2\theta = -0{,}3020$

$$I_{\Delta_1} = 125{,}678a^4(0{,}9882)^2 + 262{,}950a^4(-0{,}1528)^2 - \\ -(-21{,}832a^4)\cdot(-0{,}3020) = 122{,}275a^4$$

$$I_{\Delta_2} = 125{,}678a^4(-0{,}1528)^2 + 262{,}950a^4(0{,}9882)^2 + \\ +(-21{,}832a^4)\cdot(-0{,}3020) = 266{,}309a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că avem $I_{\Delta_1} = I'_x = I_{\min}$, $I_{\Delta_2} = I'_y = I_{\max}$

II.1.7. Razele de inerție (de girație) geometrice:

$$i'_x = \sqrt{\frac{I'_x}{A}} = \sqrt{\frac{122{,}275\,a^4}{44\,a^2}} = 1{,}67\,a$$

$$i'_y = \sqrt{\frac{I'_y}{A}} = \sqrt{\frac{266{,}309\,a^4}{44\,a^2}} = 2{,}46\,a$$

II.1.8. Ecuația elipsei centrale de inerție:

$$E_G : \frac{x'^2}{i'^2_y} + \frac{y'^2}{i'^2_x} = 1 \qquad E_G : \frac{x'^2}{(2{,}46a)^2} + \frac{y'^2}{(1{,}67a)^2} = 1$$

Reprezentarea elipsei centrale de inerție (Fig. II.4):

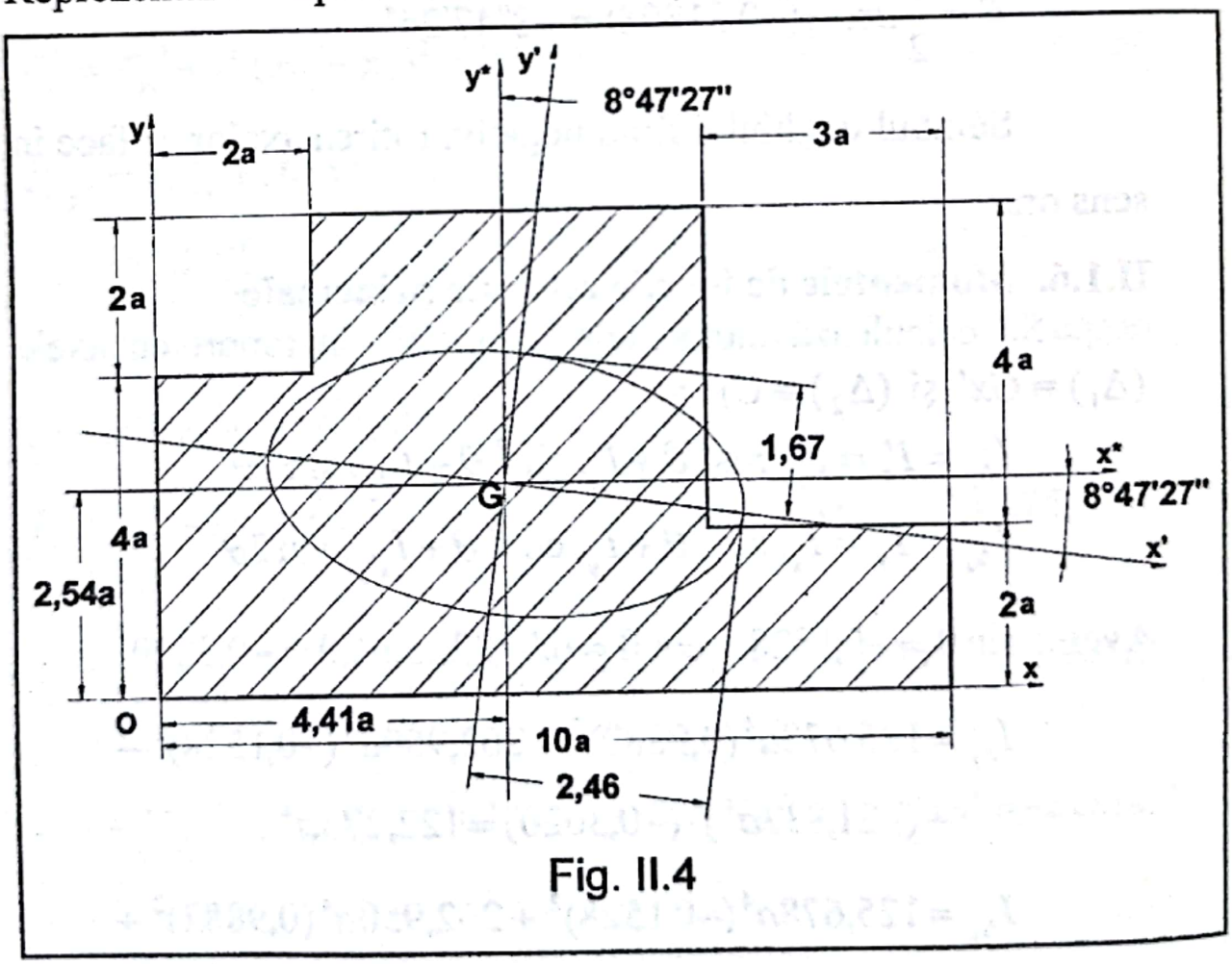


Fig. II.4

Scanned with OKEN Scanner

II.1.9. Calculul momentelor de inerție principale și trasarea elipsei de inerție în reperul Oxy.

De la punctul II.1.4 – prima metodă – se cunosc:

$$I_x = 410{,}66a^4,\ I_y = 1118{,}66a^4,\ I_{xy} = 472a^4$$

Se calculează unghiul de înclinare θ_0 al axelor principale de inerție în reperul Oxy, axe notate (Δ_{01}) și (Δ_{02}):

$$tg2\theta_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 472}{1118{,}66 - 410{,}66} = 1{,}33$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} arctg(1{,}33) \approx 26°33'54''$$

Se calculează momentele de inerție principale în raport cu axele $(\Delta_{01}) \equiv Ox''$ și $(\Delta_{02}) \equiv Oy''$:

Avem: $\sin\theta_0 = 0{,}4472,\ \cos\theta_0 = 0{,}8944,\ \sin 2\theta_0 = 0{,}800$

$$I_{\Delta_{01}} = I_x'' = I_x \cos^2\theta_0 + I_y \sin^2\theta_0 - I_{xy} \sin 2\theta_0$$

$$I_{\Delta_{02}} = I_y'' = I_x \sin^2\theta_0 + I_y \cos^2\theta_0 + I_{xy} \sin 2\theta_0$$

$$I_{\Delta_{01}} = 410{,}66a^4 \cdot (0{,}8944)^2 + 1118{,}66a^4 \cdot (0{,}4472)^2 - 472a^4 \cdot 0{,}800$$

$$I_{\Delta_{01}} = 174{,}633a^4$$

$$I_{\Delta_{02}} = 410{,}66a^4 \cdot (0{,}4472)^2 + 1118{,}66a^4 \cdot (0{,}8944)^2 + 472a^4 \cdot 0{,}800$$

$$I_{\Delta_{02}} = 1354{,}607a^4$$

Se observă că $I_{\Delta_{01}} = I_x'' = I_{min}$, $I_{\Delta_{02}} = I_y'' = I_{max}$.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează razele de inerţie geometrice

$$i_x'' = \sqrt{\frac{I_x''}{A}} = \sqrt{\frac{174{,}633\,a^4}{44a^2}} = 1{,}99\ a$$

$$i_y'' = \sqrt{\frac{I_y''}{A}} = \sqrt{\frac{1354{,}607\,a^4}{44a^2}} = 5{,}55\ a$$

şi ecuaţia elipsei de inerţie în reperul $Ox''y''$:

$$E_0 : \frac{x''^2}{i_y''^2} + \frac{y''^2}{i_x''^2} = 1 \qquad E_0 : \frac{x''^2}{(5{,}55a)^2} + \frac{y''^2}{(1{,}99a)^2} = 1$$

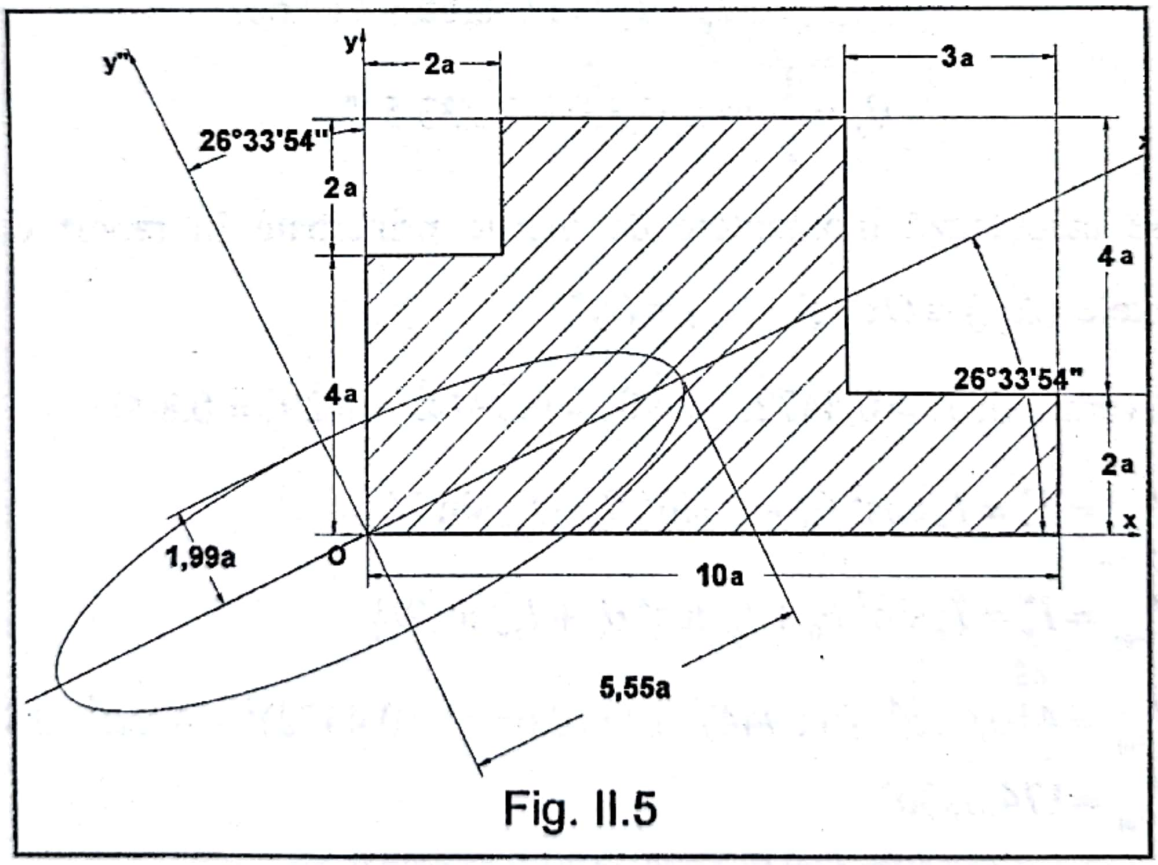


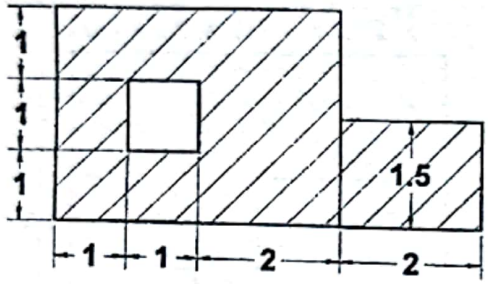
Fig. II.5

Scanned with OKEN Scanner

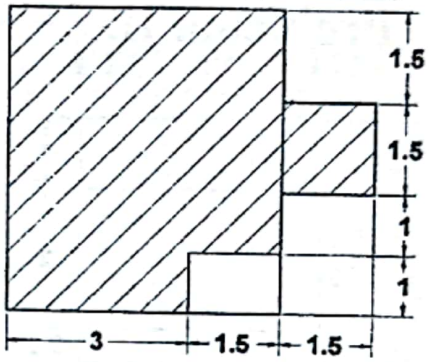
II.2. Aplicații - figuri formate din dreptunghiuri

Să se calculeze momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa omogenă din figură, atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii. Axa $Gx^* \parallel Ox$ și axa $Gy^* \parallel Oy$. Dimensiunile sunt indicate pe desen în decimetri.

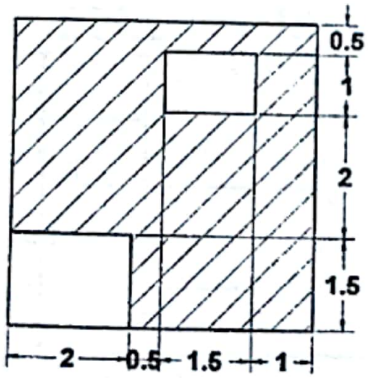
Problema ID1.



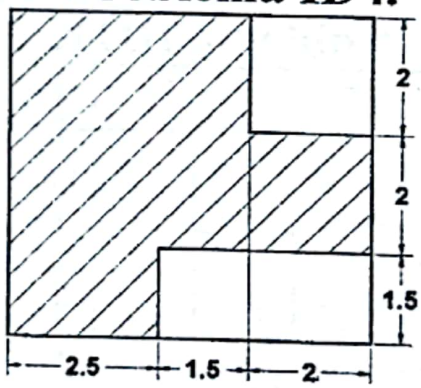
Problema ID2.



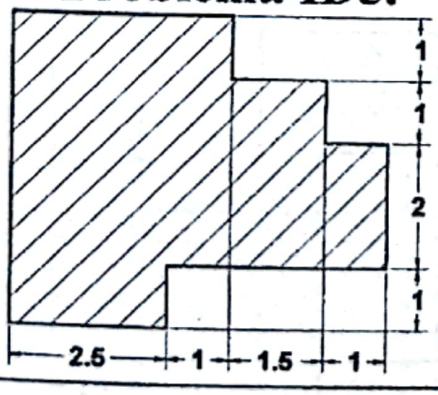
Problema ID3.



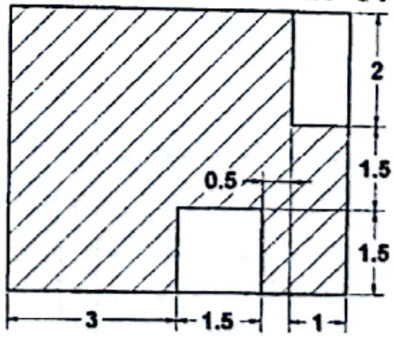
Problema ID4.



Problema ID5.

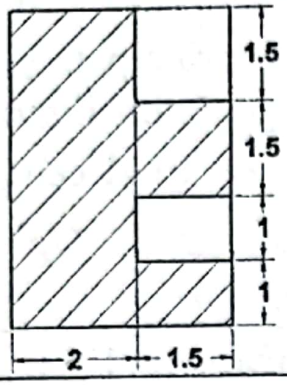


Problema ID6.

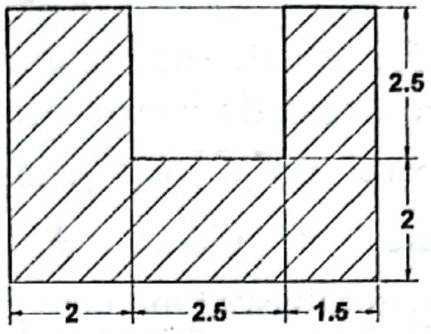


Scanned with OKEN Scanner

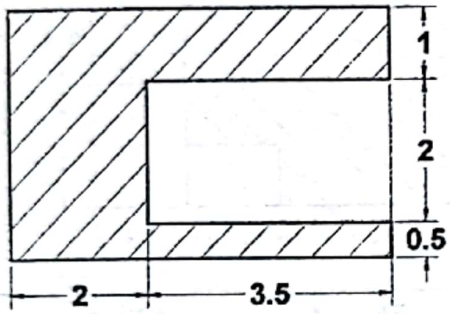
Problema ID7.



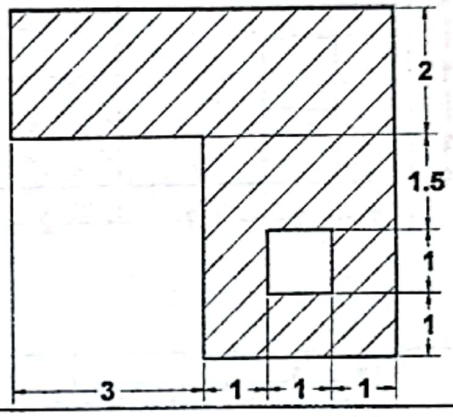
Problema ID8.



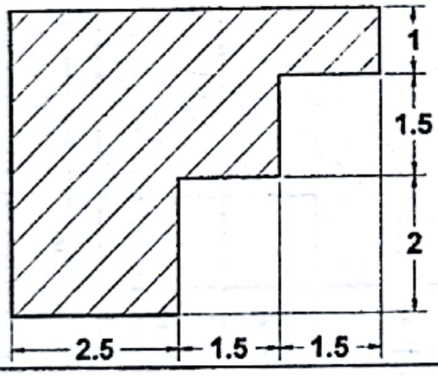
Problema ID9.



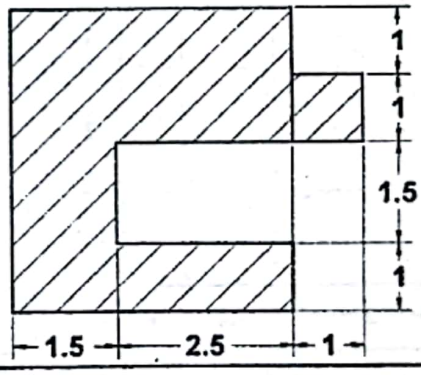
Problema ID10.



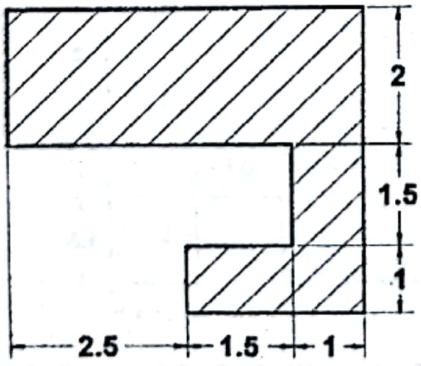
Problema ID11.



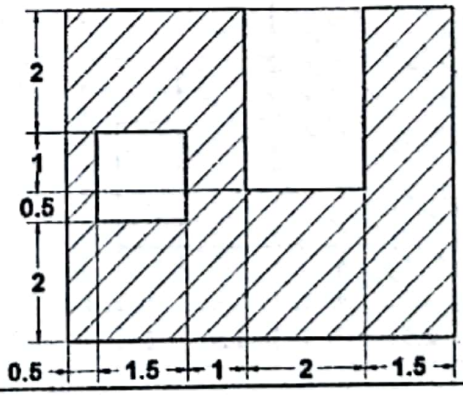
Problema ID12.



Problema ID13.

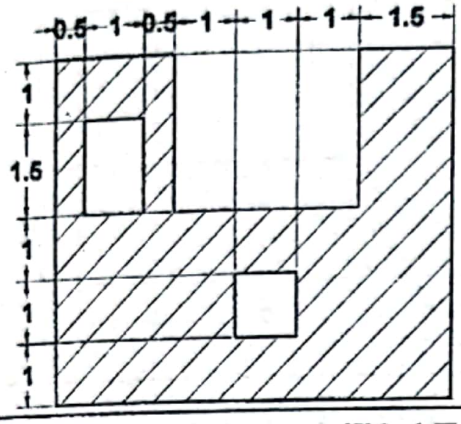


Problema ID14.

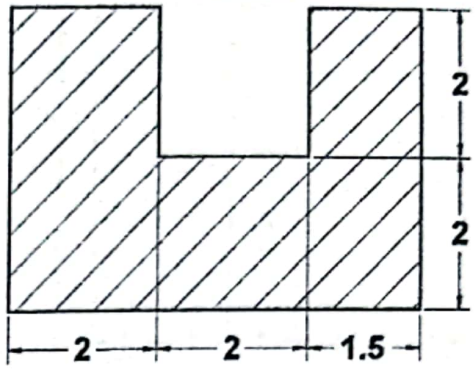


Scanned with OKEN Scanner

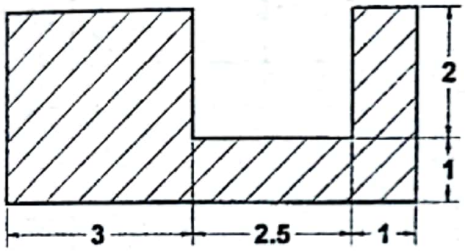
Problema ID15.



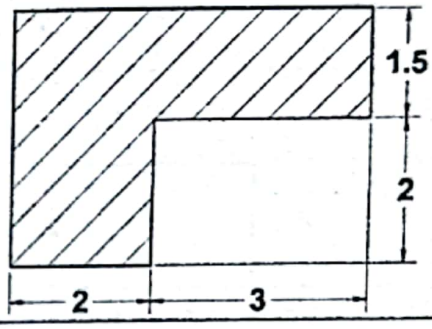
Problema ID16.



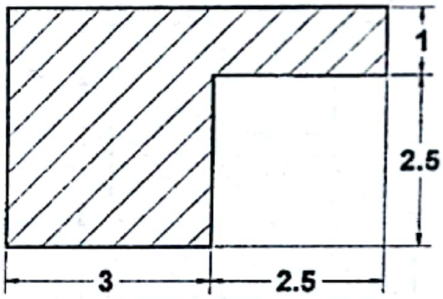
Problema ID17.



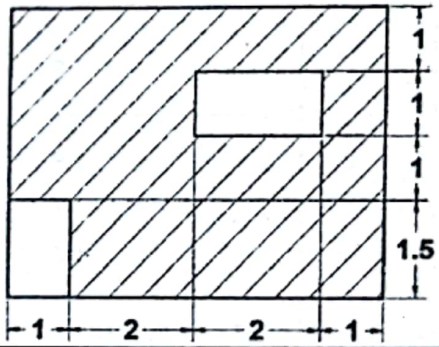
Problema ID18.



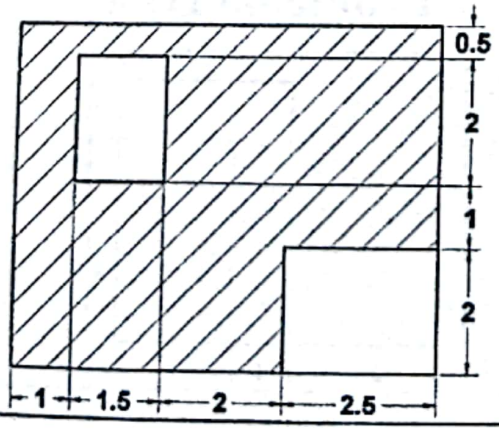
Problema ID19.



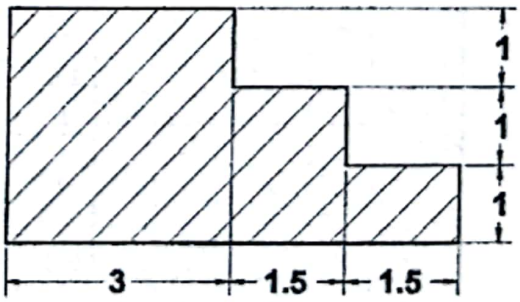
Problema ID20.



Problema ID21.

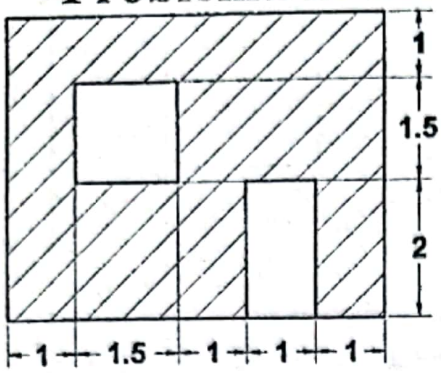


Problema ID22.

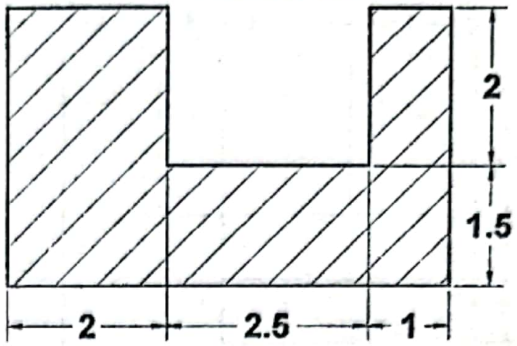


Scanned with OKEN Scanner

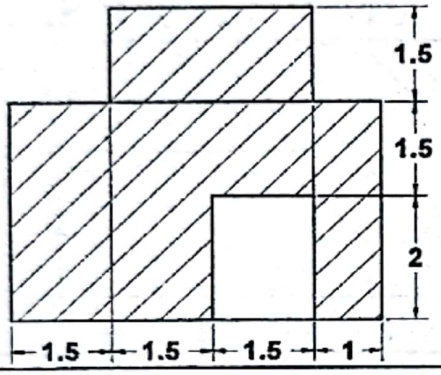
Problema ID23.



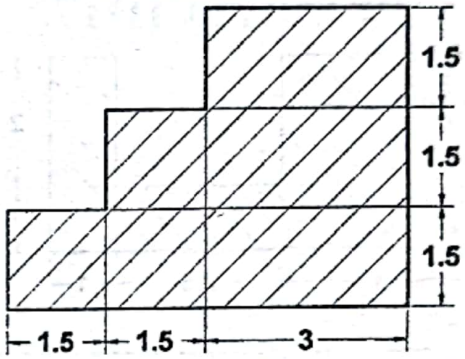
Problema ID24.



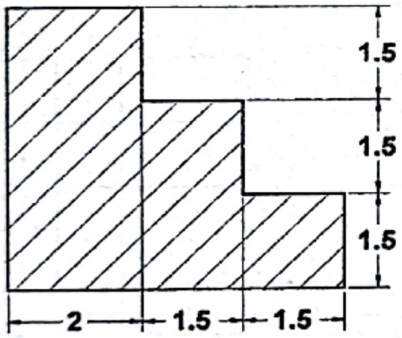
Problema ID25.



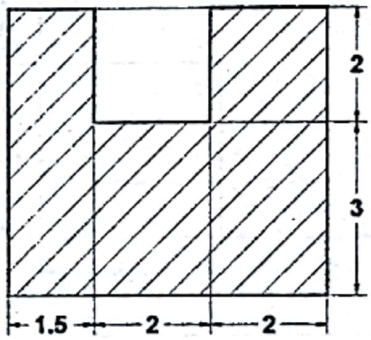
Problema ID26.



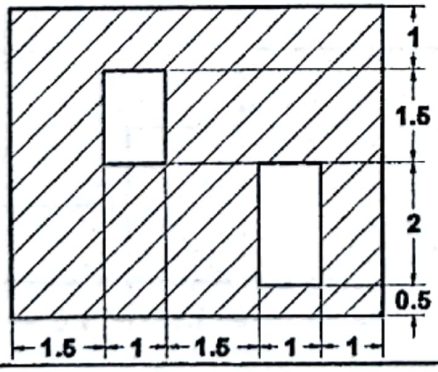
Problema ID27.



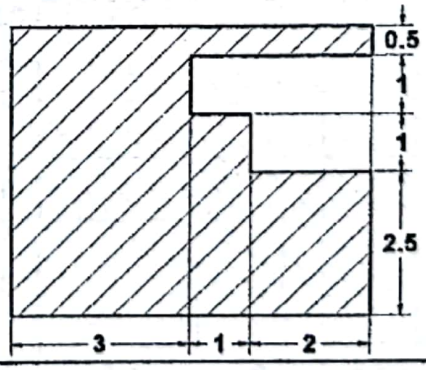
Problema ID28.



Problema ID29.



Problema ID30.



Scanned with OKEN Scanner

III. MOMENTE DE INERȚIE PENTRU PLĂCI PLANE ASIMETRICE

III.1. Exemplu de calcul

Să se determine momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa omogenă din (Fig. III.1) atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii, $Gx^* \| Ox$, $Gy^* \| Oy$. Dimensiunile sunt indicate pe desen, unde *a* reprezintă ordinul de mărime și unitatea de lungime.

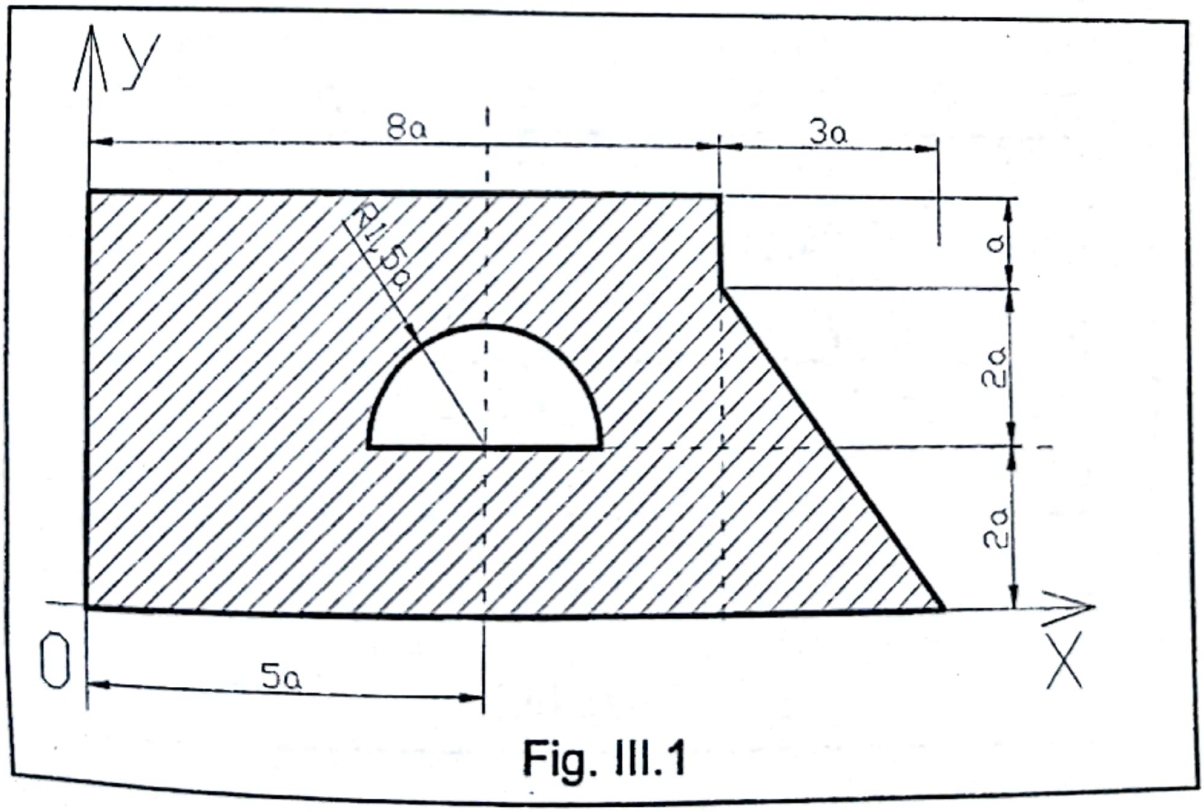


Fig. III.1

Scanned with OKEN Scanner

III.1.1. Împărțirea plăcii în figuri elementare.

Placa este compusă dintr-un dreptunghi, un triunghi și un semicerc. Notăm cu:

(1) – dreptunghiul plin, de laturi $8a$ și $5a$;

(2) – triunghiul dreptunghic plin, de catete $3a$ și $4a$;

(3) – semicercul decupat, de rază $1{,}5a$.

Prima latură este latura orizontală, a doua latură este cea verticală.

III.1.2. Se determină coordonatele centrului de greutate al plăcii în reperul *Oxy*.

Se stabilesc coordonatele centrelor de greutate ale figurilor elementare: G_1, G_2, G_3.

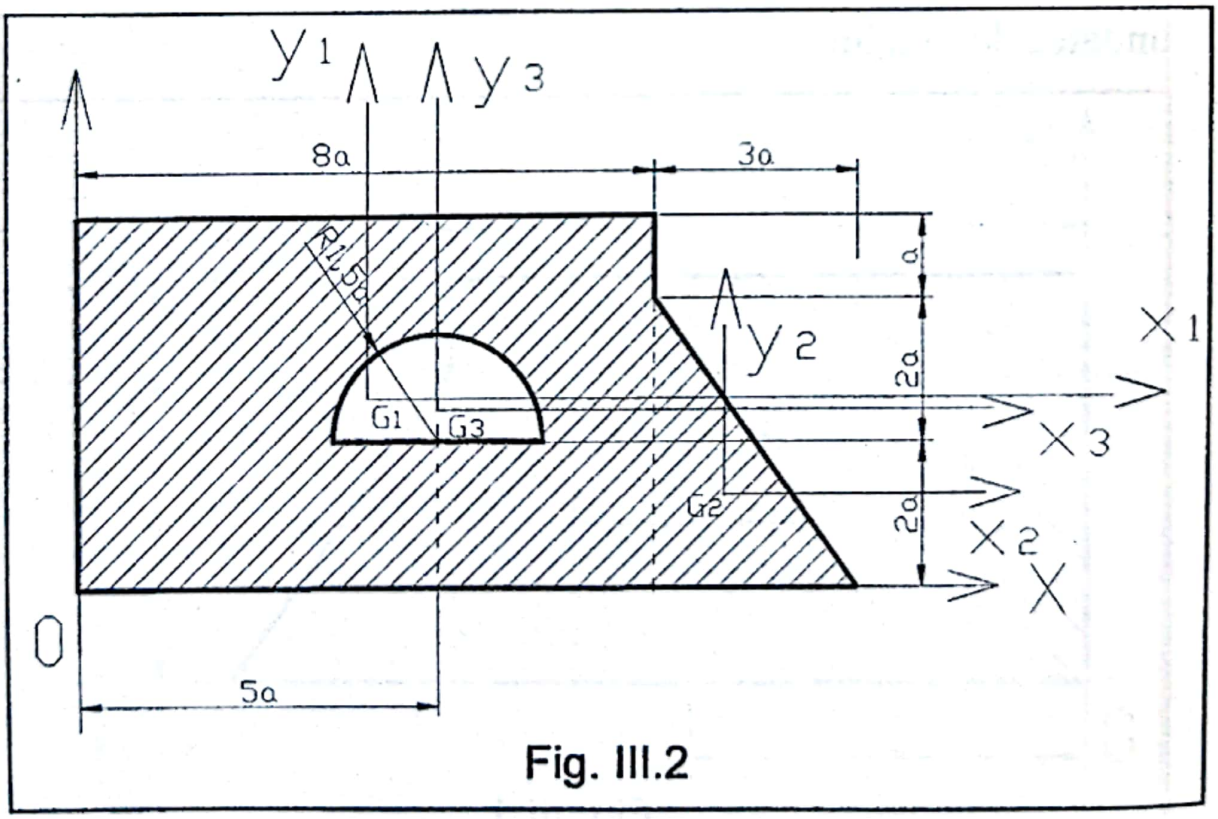


Fig. III.2

Scanned with OKEN Scanner

$$x_{G_1} = \frac{8a}{2} = 4a, \qquad y_{G_1} = \frac{5a}{2} = 2{,}5a$$

$$x_{G_2} = 8a + \frac{3a}{3} = 9a, \quad y_{G_2} = \frac{4a}{3} = 1{,}33a$$

$$x_{G_3} = 5a, \quad y_{G_3} = 2a + \frac{4R}{3\pi} = 2a + \frac{4 \cdot 1{,}5a}{3\pi} = 2{,}64a$$

Se calculează ariile figurilor elementare. La placa semicirculară, decupată, aria se trece în tabel cu semnul minus:

$$A_1 = 8a \cdot 5a = 40a^2, \quad A_2 = \frac{3a \cdot 4a}{2} = 6a^2$$

$$A_3 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (1{,}5a)^2 = 3{,}53a^2$$

Cu aceste date se completează tabelul:

Figura	x_{G_i}	y_{G_i}	A_i	$x_{G_i}A_i$	$y_{G_i}A_i$
(1)	$4a$	$2{,}5a$	$40a^2$	$160a^3$	$100a^3$
(2)	$9a$	$1{,}33a$	$6a^2$	$54a^3$	$7{,}98a^3$
(3)	$5a$	$2{,}64a$	$-3{,}53a^2$	$-17{,}65a^3$	$-9{,}32a^3$
Total			$42{,}47a^2$	$196{,}35a^3$	$98{,}66a^3$

Scanned with OKEN Scanner

Coordonatele centrului de greutate ale întregii plăci:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{196{,}35a^3}{42{,}47a^2} = 4{,}623a$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{3} A_i} = \frac{98{,}66a^3}{42{,}47a^2} = 2{,}324a$$

III.1.3. Calculul momentelor de inerţie centrale principale şi trasarea elipsei de inerţie în reperul Gx^*y^*

Notând $G_1x_1y_1, G_2x_2y_2, G_3x_3y_3$ reperele proprii ale fiecărei porţiuni, repere având originea în centrele de greutate ale porţiunilor şi axele paralele cu axele reperului Oxy, se scriu momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului propriu. Laturile porţiunilor se notează cu b (latura orizontală) şi cu h (latura verticală). Indicii şi cifrele din paranteză se referă la numărul de ordine al porţiunii respective.

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{8a \cdot (5a)^3}{12} = 83{,}33\ a^4$$

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{b_1^3 h}{12} = \frac{(8a)^3 \cdot 5a}{12} = 213{,}33\ a^4$$

$I_{x_1y_1}^{(1)} = 0$ (G_1x_1 şi G_1y_1 sunt axe de simetrie)

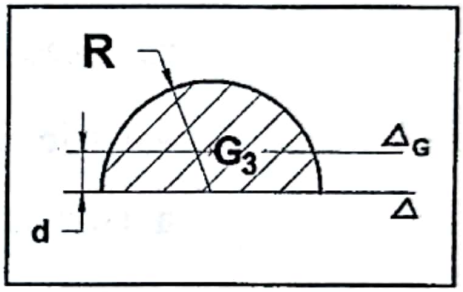
Scanned with OKEN Scanner

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{36} = 5{,}33\ a^4$$

$$I_{y_2}^{(2)} = \frac{b_2^3 h_2}{36} = \frac{(3a)^3 \cdot 4a}{36} = 3\ a^4$$

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = -\frac{b_2^2 h_2^2}{72} = -\frac{(3a)^2 \cdot (4a)^2}{72} = -2a^4$$

Plăcii semicirculare i se cunoaşte momentul de inerție față de o axă Δ care trece prin diametrul orizontal, $I_\Delta = \frac{\pi R^4}{8} = 1{,}99a^4$. Axa



$\Delta_G \equiv G_3 x_3$ trece prin centrul de greutate G_3 şi este paralelă cu axa Δ. Distanța între diametrul orizontal şi axa $G_3 x_3$ este $d = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 1{,}5a}{3\pi} = 0{,}64a$. Pentru determinarea momentului de inerție axial față de axa $G_3 x_3$ se aplică relația lui Steiner (I.21):

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta G} + A \cdot d^2}$$ de unde

$$\boxed{I_{\Delta G} = I_\Delta - A \cdot d^2}$$

$$I_{x_3}^{(3)} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \cdot \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 = 1{,}99a^4 - 3{,}53a^2 \cdot (0{,}64a)^2 = 0{,}54a^4$$

$$I_{y_3}^{(3)} = \frac{\pi R^4}{8} = 1{,}99a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

$I^{(3)}_{x_3y_3} = 0$ (G_3y_3 este axă de simetrie)

Pentru obţinerea momentelor de inerţie ale plăcii în raport cu axele reperului Gx^*y^* se pot aplica două metode:

1. se calculează întâi momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Oxy, apoi se însumează pentru întreaga placă şi se trece în reperul Gx^*y^*, folosind legea de variaţie a momentelor de inerţie la translaţia axelor (relaţia lui Steiner pentru întreaga placă);
2. se calculează direct momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Gx^*y^* (relaţia lui Steiner pentru fiecare porţiune) şi se însumează pentru întreaga placă.

Prima metodă

Se calculează momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Oxy. Pentru porţiunile care au o latură pe axa faţă de care se face calculul, se aplică direct formula cunoscută din Tabelul I.V, Cap. I (momente de inerţie pentru figuri particulare). În celelalte situaţii se aplică relaţia lui Steiner.

Scanned with OKEN Scanner

$$I_x^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{3} = \frac{8a \cdot (5a)^3}{3} = 333{,}33\,a^4$$

$$I_y^{(1)} = \frac{b_1^3 h_1}{3} = \frac{(8a)^3 \cdot 5a}{3} = 853{,}33\,a^4$$

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{b_1^2 h_1^2}{4} = \frac{(8a)^2 \cdot (5a)^2}{4} = 400\,a^4$$

$$I_x^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{3a \cdot (4a)^3}{12} = 16\,a^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A_2 x_{G_2}^2 = 3a^4 + 6a^2 \cdot (9a)^2 = 489a^4$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2 y_2}^{(2)} + A_2 x_{G_2} y_{G_2} = -2a^4 + 6a^2 \cdot 9a \cdot 1{,}33a = 69{,}82\,a^4$$

$$I_x^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + A_3 y_{G_3}^2 = 0{,}54\,a^4 + 3{,}53\,a^2 \cdot (2{,}64\,a)^2 = 25{,}14\,a^4$$

$$I_y^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} + A_3 x_{G_3}^2 = 1{,}99\,a^4 + 3{,}53\,a^2 (5a)^2 = 90{,}24a^4$$

$$I_{xy}^{(3)} = I_{x_3 y_3}^{(3)} + A_3 x_{G_3} y_{G_3} = 0 + 3{,}53\,a^2 \cdot 5a \cdot 2{,}64a = 46{,}6a^4$$

Se calculează momentele de inerţie ale întregii plăci în raport cu axele reperului Oxy:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 333{,}33\,a^4 + 16a^4 - 25{,}14\,a^4 = 324{,}19\,a^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 853{,}33\,a^4 + 489a^4 - 90{,}24a^4 = 1252{,}09\,a^4$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 400a^4 + 69{,}82a^4 - 46{,}6\,a^4 = 423{,}22a^4$$

Aria plăcii se citeşte din tabel: $A = 42{,}47a^2$

Se calculează momentele de inerţie ale întregii plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

Scanned with OKEN Scanner

$$I_{x^*} = I_x - Ay_G^2 = 324{,}19a^4 - 42{,}47a^2.(2{,}324\ a)^2 = 94{,}81a^4$$
$$I_{y^*} = I_y - Ax_G^2 = 1252{,}09a^4 - 42{,}47a^2.(4{,}623\ a)^2 = 344{,}42a^4$$
$$I_{x^*y^*} = I_{xy} - Ax_G y_G = 423{,}22a^4 - 42{,}47a^2 \cdot 4{,}623a \cdot 2{,}324a = -33{,}07a^4$$

A doua metodă

Se calculează momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*}^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + A_1(y_{G_1} - y_G)^2 = 83{,}33\,a^4 + 40a^2(2{,}5a - 2{,}324a)^2 = 84{,}57a^4$$
$$I_{y^*}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + A_1(x_{G_1} - x_G)^2 = 213{,}33\,a^4 + 40a^2(4a - 4{,}623a)^2 = 228{,}86a^4$$
$$I_{x^*y^*}^{(1)} = I_{x_1y_1}^{(1)} + A_1(x_{G1} - x_G)(y_{G_1} - y_G) =$$
$$I_{x^*y^*}^{(1)} = 0 + 40a^2(4a - 4{,}623a)(2{,}5a - 2{,}324a) = -4{,}39a^4$$
$$I_{x^*}^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A_2(y_{G_2} - y_G)^2$$
$$I_{x^*}^{(2)} = 5{,}33\,a^4 + 6a^2(1{,}33a - 2{,}324a)^2 = 11{,}26a^4$$
$$I_{y^*}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A_2(x_{G_2} - x_G)^2 = 3a^4 + 6a^2(9a - 4{,}623a)^2 = 117{,}95a^4$$
$$I_{x^*y^*}^{(2)} = I_{x_2y_2}^{(2)} + A_2(x_{G_2} - x_G)(y_{G_2} - y_G)$$
$$I_{x^*y^*}^{(2)} = -2a^4 + 6a^2(9a - 4{,}623a)(1{,}33a - 2{,}324a) = -28{,}10\,a^4$$
$$I_{x^*}^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + A_3(y_{G_3} - y_G)^2$$
$$I_{x^*}^{(3)} = 0{,}54\,a^4 + 3{,}53a^2(2{,}64a - 2{,}324a)^2 = 0{,}9a^4$$
$$I_{y^*}^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} + A_3(x_{G_3} - x_G)^2 = 1{,}99\,a^4 + 3{,}53\,a^2(5a - 4{,}623a)^2 = 2{,}49a^4$$
$$I_{x^*y^*}^{(3)} = I_{x_3y_3}^{(3)} + A_3(x_{G_3} - x_G)(y_{G_3} - y_G)$$
$$I_{x^*y^*}^{(3)} = 0 + 3{,}53\,a^2(5a - 4{,}623a)(2{,}64\,a - 2{,}324a) = 0{,}42a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează momentele de inerție ale întregii plăci plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*} = I_{x^*}^{(1)} + I_{x^*}^{(2)} - I_{x^*}^{(3)} = 84{,}57a^4 + 11{,}26a^4 - 0{,}9a^4 = 94{,}93a^4$$

$$I_{y^*} = I_{y^*}^{(1)} + I_{y^*}^{(2)} - I_{y^*}^{(3)} = 228{,}86a^4 + 117{,}95a^4 - 2{,}49a^4 = 344{,}32a^4$$

$$I_{x^*y^*} = I_{x^*y^*}^{(1)} + I_{x^*y^*}^{(2)} - I_{x^*y^*}^{(3)} = -4{,}39\,a^4 - 28{,}10\,a^4 - 0{,}42\,a^4 = -32{,}91a^4$$

Se observă că pentru momentele de inerție I_x^*, I_y^*, I_{xy}^* s-au obținut aproximativ aceleaşi valori prin cele două metode de calcul.

Unghiul θ de înclinare al axelor centrale principale de inerție, axe notate (Δ_1) şi (Δ_2) se calculează cu:

$$tg2\theta = \frac{2I_{x^*y^*}}{I_{y^*} - I_{x^*}} = \frac{2(-33{,}07)}{344{,}42 - 94{,}81} = -0{,}26$$

S-au luat în calcul valorile obținute prin metoda întâia.

$$\theta = \frac{1}{2} arctg(-0{,}26) = -7^\circ 22' 15''$$

Se determină:

$$\sin\theta = -0{,}1282, \quad \cos\theta = 0{,}9917, \quad \sin 2\theta = -0{,}2545$$

Se calculează momentele de inerție centrale principale în raport cu axele $(\Delta_1) \equiv Gx'$ şi $(\Delta_2) \equiv Gy'$ după care momentele de inerție sunt maxime sau minime:

Scanned with OKEN Scanner

$$I_{\Delta 1} = I_{x'} = I_x \cdot \cos^2\theta + I_y \cdot \sin^2\theta - I_{x \cdot y} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{\Delta 2} = I_{y'} = I_x \cdot \sin^2\theta + I_y \cdot \cos^2\theta + I_{x \cdot y} \cdot \sin 2\theta$$

$$I_{\Delta 1} = 94{,}81a^4 \cdot (0{,}9917)^2 + 344{,}42a^4 \cdot (-0{,}1282)^2 -$$
$$-(-33{,}07a^4) \cdot (-0{,}2545) = 90{,}49\,a^4$$

$$I_{\Delta 2} = 94{,}81a^4 \cdot (-0{,}1282)^2 + 344{,}42a^4 \cdot (0{,}9917)^2 +$$
$$+(-33{,}07a^4) \cdot (-0{,}2545) = 348{,}70\,a^4$$

Momentele maxime şi minime în raport cu sistemul

Oxy: $I_{\Delta 1} = I_{x'} = I_{\min}$, $I_{\Delta 2} = I_{y'} = I_{\max}$

Se calculează razele de inerţie geometrice:

$$i_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \sqrt{\frac{90{,}49\,a^4}{42{,}47\,a^2}} = 1{,}46\ a; \quad i_{y'} = \sqrt{\frac{I_{y'}}{A}} = \sqrt{\frac{348{,}70\,a^4}{42{,}47\,a^2}} = 2{,}86\ a$$

Ecuaţia elipsei centrale de inerţie:

$$E_G : \frac{x'^2}{i_{y'}^2} + \frac{y'^2}{i_{x'}^2} = 1 \qquad E_G : \frac{x'^2}{(2{,}86a)^2} + \frac{y'^2}{(1{,}46a)^2} = 1$$

Reprezentarea elipsei centrale de inerţie (Fig. III.3):

Scanned with OKEN Scanner

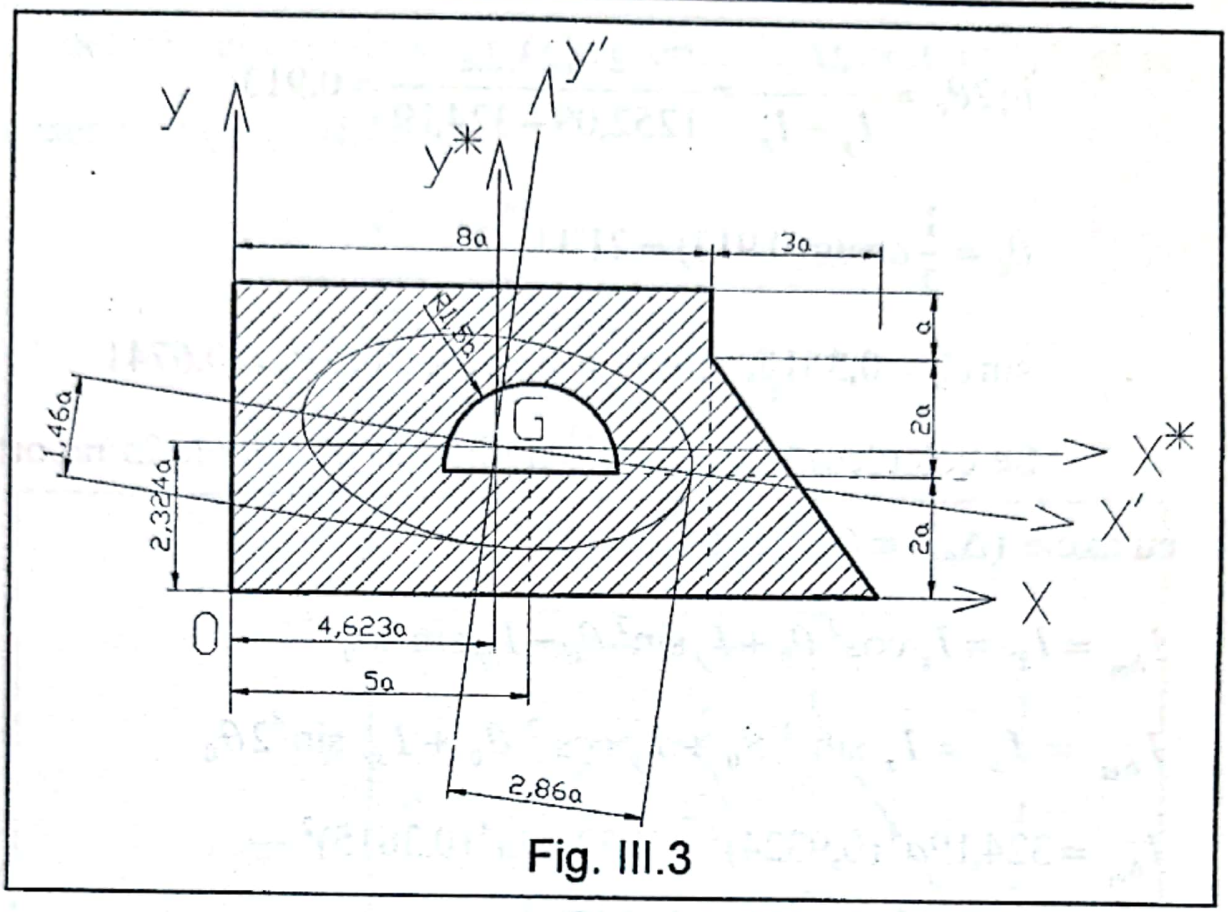


Fig. III.3

III.1.4. Calculul momentelor de inerţie principale şi trasarea elipsei de inerţie în reperul *Oxy*

De la punctul IV.1.3.– prima metodă se cunosc:

$I_x = 324{,}19\,a^4$, $I_y = 1252{,}09\,a^4$, $I_{xy} = 423{,}22\,a^4$

Se calculează unghiul de înclinare θ_0 al axei principale de inerţie (Δ_{01}) în reperul Oxy. Perpendicular în originea O pe axa (Δ_{01}), se desenează axa (Δ_{02}). În raport cu aceste două axe, momentele de inerţie sunt maxime sau minime.

Scanned with OKEN Scanner

$$tg2\theta_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 423{,}22}{1252{,}09 - 324{,}19} = 0{,}913$$

$$\theta_0 = \frac{1}{2} arctg(0{,}913) = 21^o 11' 38''$$

$$\sin\theta_0 = 0{,}3615, \quad \cos\theta_0 = 0{,}9324, \quad \sin 2\theta_0 = 0{,}6741$$

Se calculează momentele de inerție principale în raport cu axele $(\Delta_{01}) \equiv Ox''$ și $(\Delta_{02}) \equiv Oy''$:

$$I_{\Delta_{01}} = I_{x'} = I_x \cos^2\theta_0 + I_y \sin^2\theta_0 - I_{xy} \sin 2\theta_0$$

$$I_{\Delta_{02}} = I_y = I_x \sin^2\theta_0 + I_y \cos^2\theta_0 + I_{xy} \sin 2\theta_0$$

$$I_{\Delta_{01}} = 324{,}19a^4 (0{,}9324)^2 + 1252{,}09a^4 (0{,}3615)^2 -$$
$$- 423{,}22a^4 \cdot 0{,}6741) = 160{,}17\, a^4$$

$$I_{\Delta_{02}} = 324{,}19 \cdot (0{,}3615)^2 + 1252{,}09a^4 \cdot (0{,}9324)^2 +$$
$$+ 423{,}22a^4 \cdot 0{,}6741 = 1416{,}18\, a^4$$

Se observă că: $I_{\Delta_{01}} = I_{x'} = I_{\min}$, $I_{\Delta_{02}} = I_{y'} = I_{\max}$.

Se calculează razele de inerție geometrice:

$$i_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \sqrt{\frac{160{,}17\, a^4}{42{,}47\, a^2}} = 1{,}94\, a$$

$$i_{y'} = \sqrt{\frac{I_{y'}}{A}} = \sqrt{\frac{1416{,}18\, a^4}{42{,}47\, a^2}} = 5{,}77\, a$$

Scanned with OKEN Scanner

se determină ecuația elipsei de inerție în reperul $Ox''y''$ și se desenează (Fig. III.4):

$$E_0 : \frac{x''^2}{i_{y''}^2} + \frac{y''^2}{i_{x''}^2} = 1$$

$$E_0 : \frac{x''^2}{(5{,}77a)^2} + \frac{y''^2}{(1{,}94a)^2} = 1$$

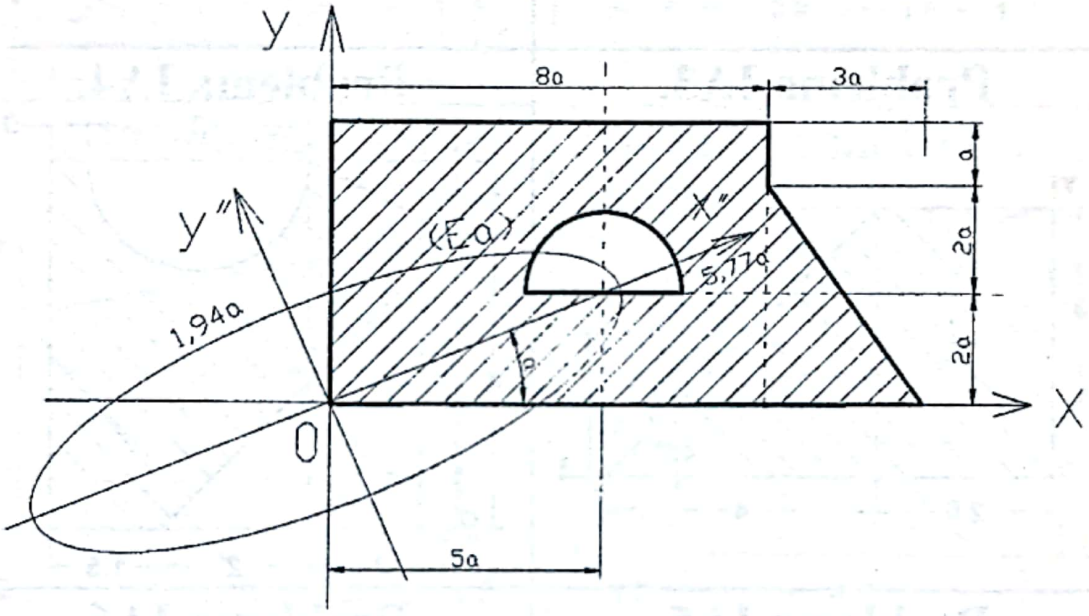


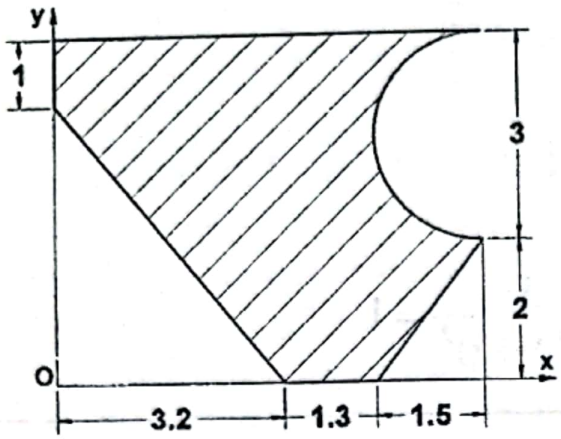
Fig. III.4

III.2. Aplicații - plăci asimetrice

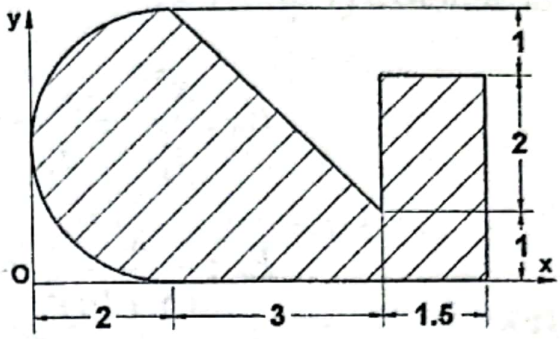
Să se calculeze momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa asimetrică omogenă din figură, atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii. Axa $Gx^* \parallel Ox$ și axa $Gy^* \parallel Oy$. Dimensiunile sunt indicate pe desen în decimetri.

Scanned with OKEN Scanner

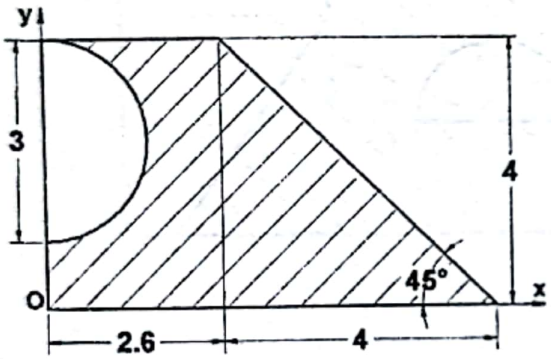
Problema IA1.



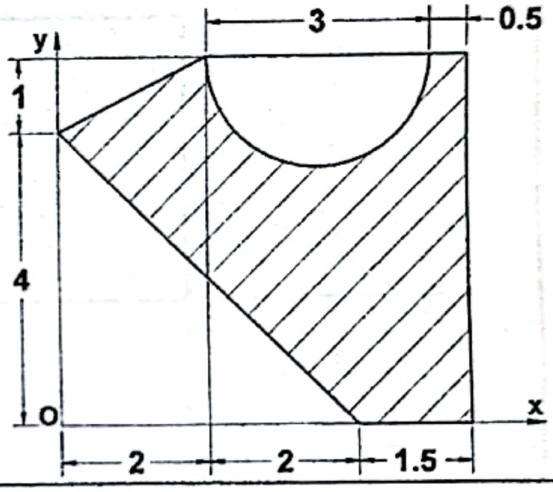
Problema IA2.



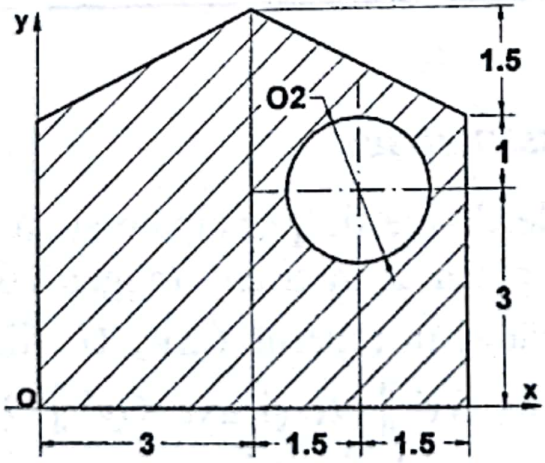
Problema IA3.



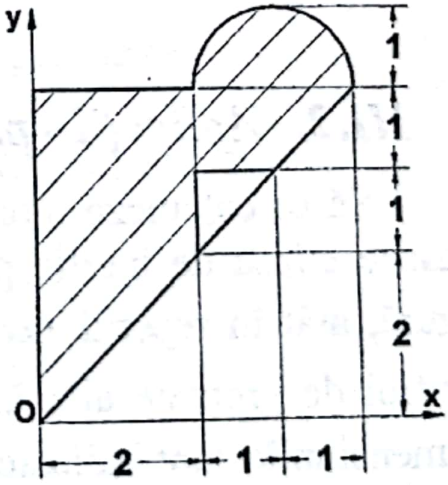
Problema IA4.



Problema IA5.

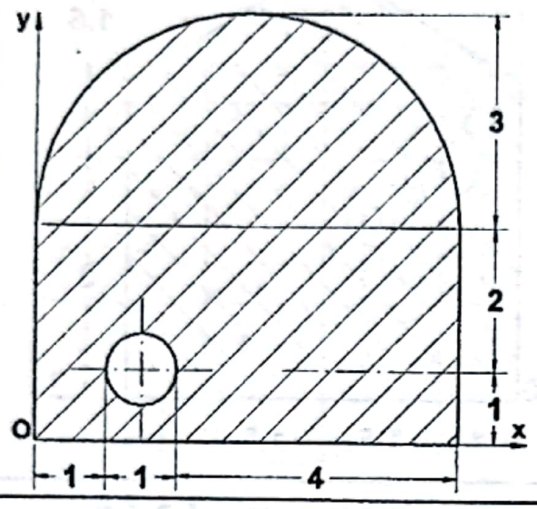


Problema IA6.

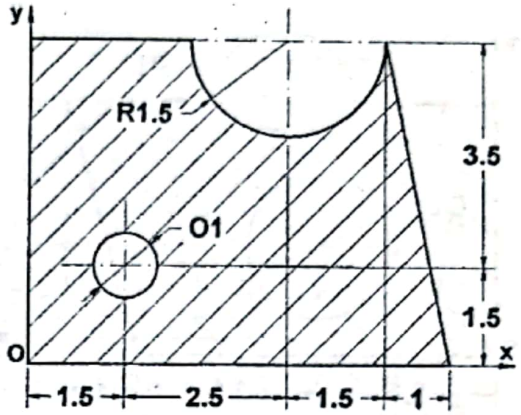


Scanned with OKEN Scanner

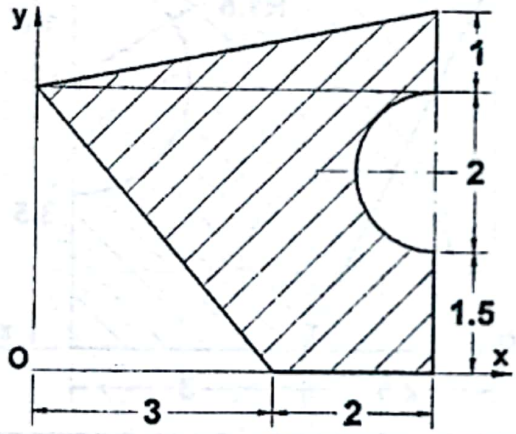
Problema IA7.



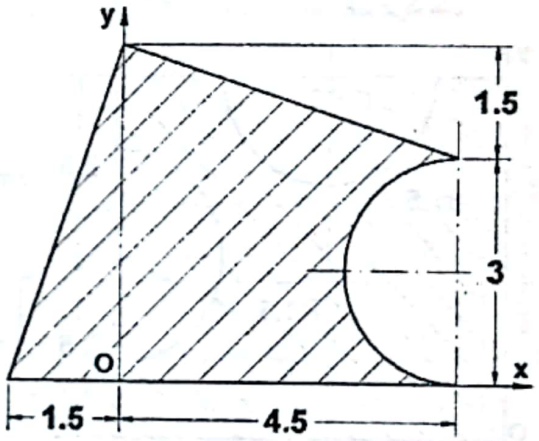
Problema IA8.



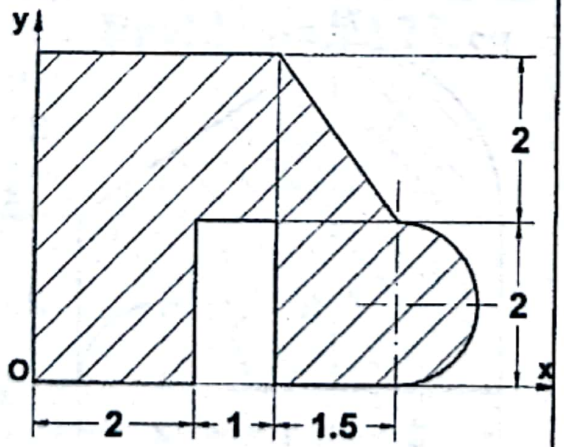
Problema IA9.



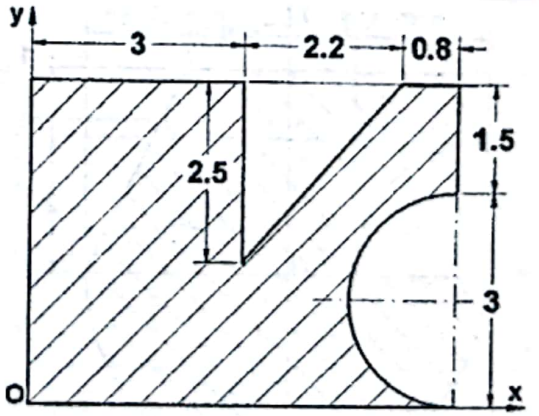
Problema IA10.



Problema IA11.

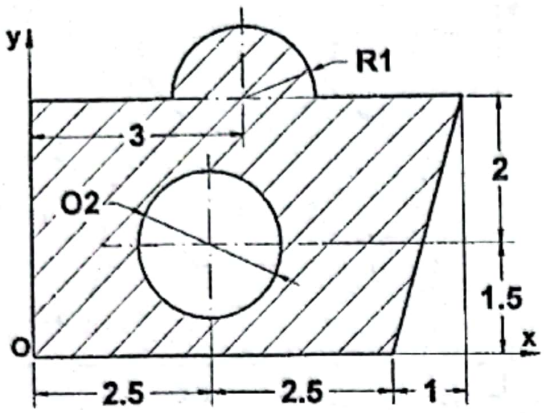


Problema IA12.

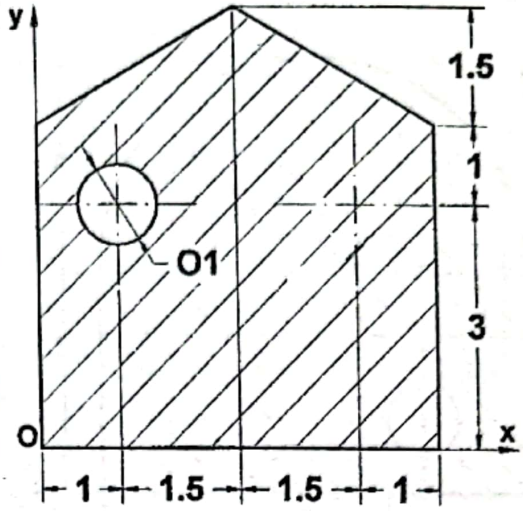


Scanned with OKEN Scanner

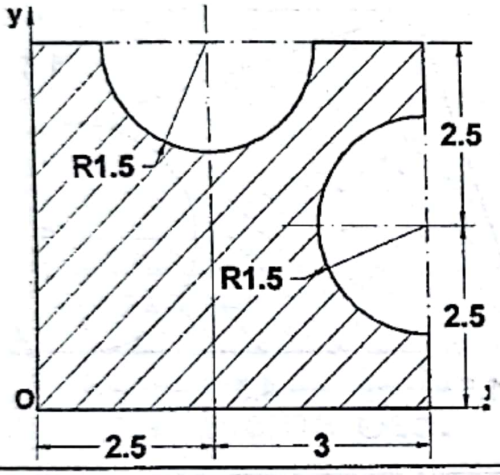
Problema IA13.



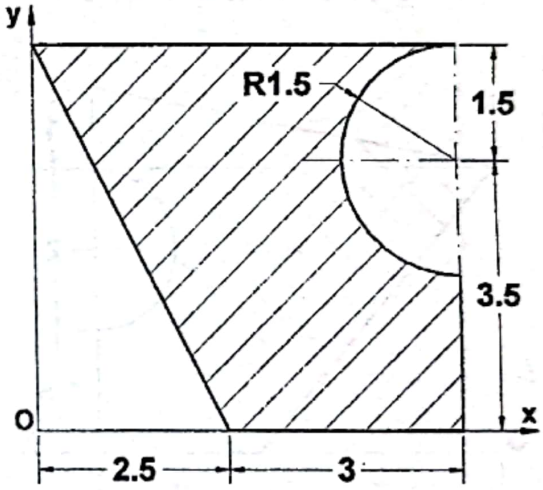
Problema IA14.



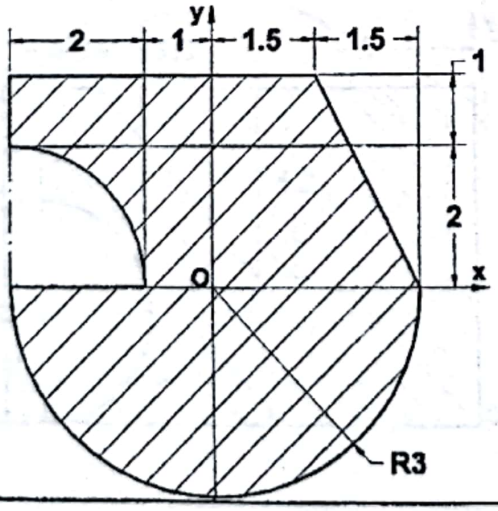
Problema IA15.



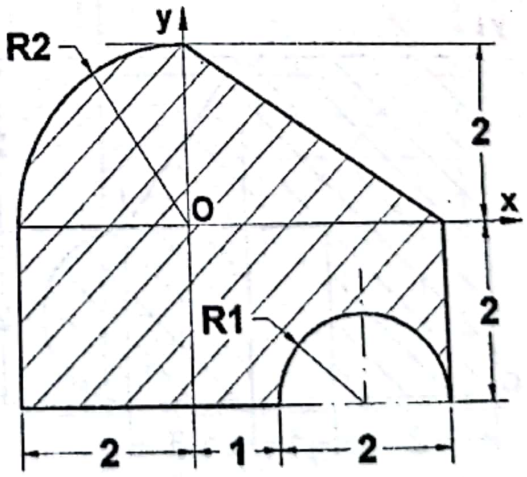
Problema IA16.



Problema IA17.

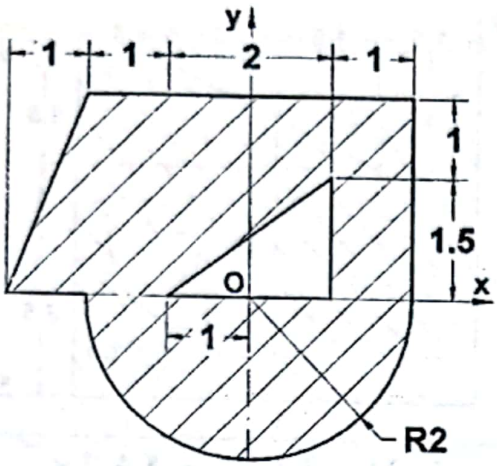


Problema IA18.

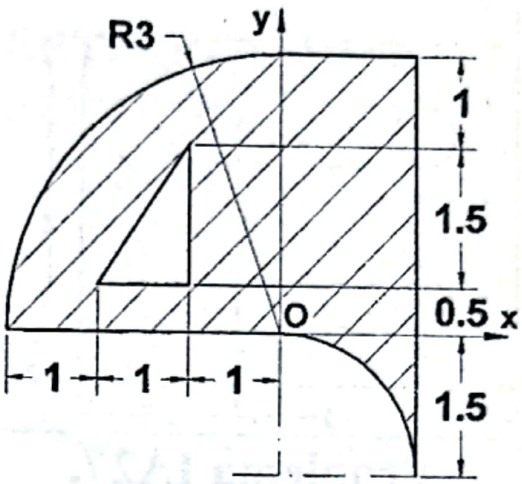


Scanned with OKEN Scanner

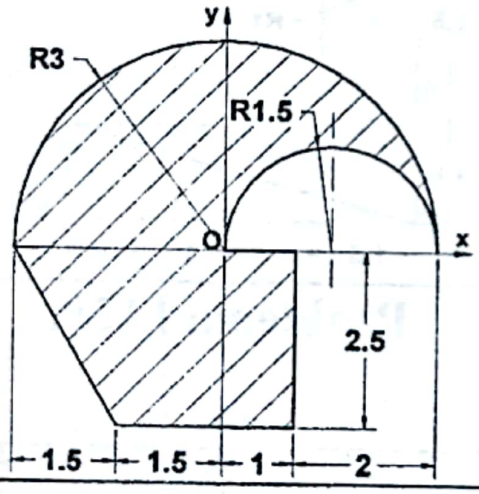
Problema IA19.



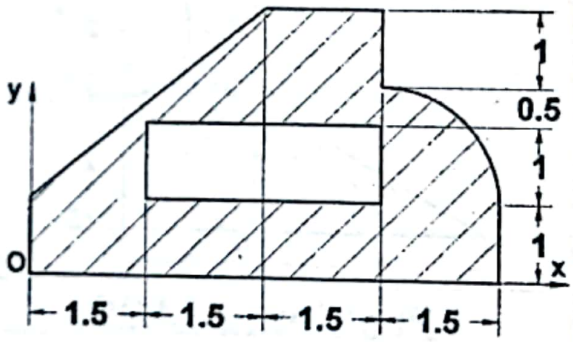
Problema IA20.



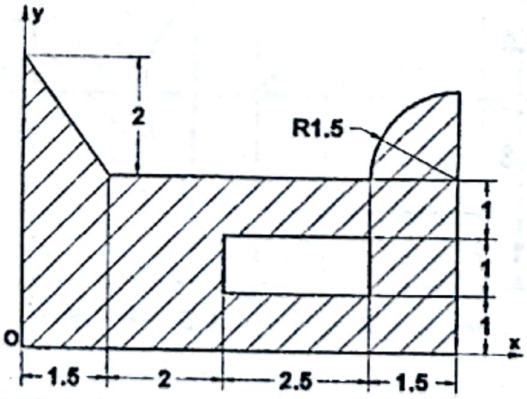
Problema IA21.



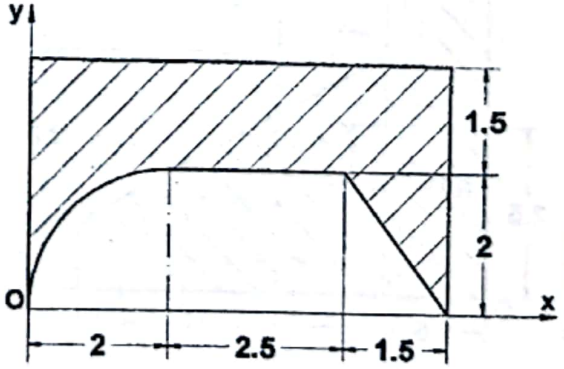
Problema IA22.



Problema IA23.

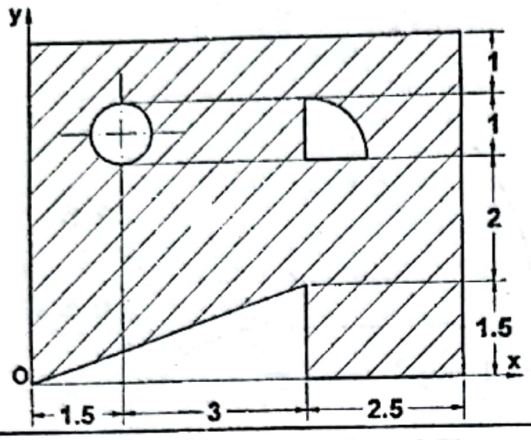


Problema IA24.

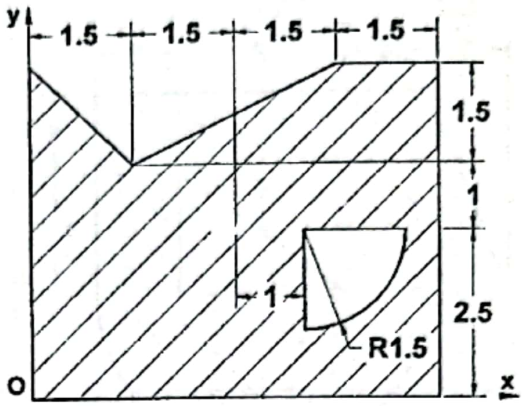


Scanned with OKEN Scanner

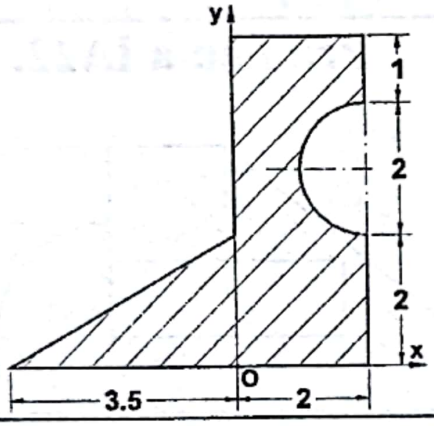
Problema IA25.



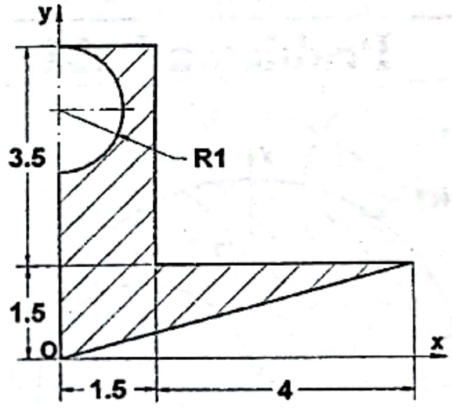
Problema IA26.



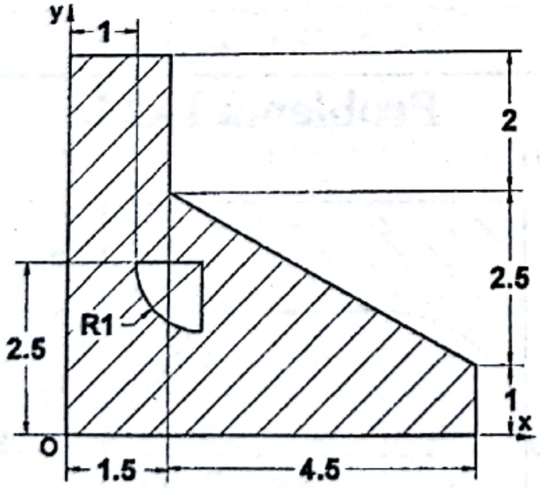
Problema IA27.



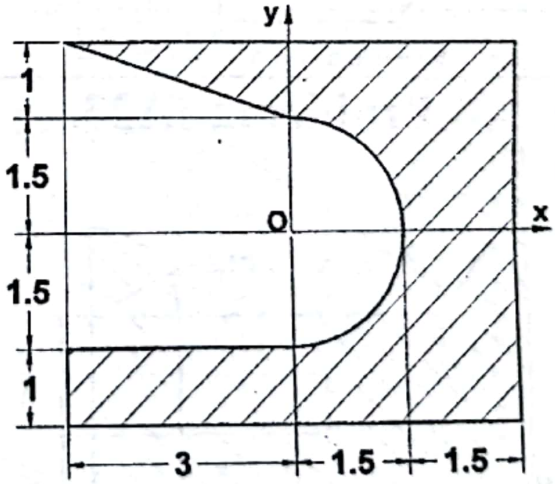
Problema IA28.



Problema IA29.



Problema IA30.



Scanned with OKEN Scanner

IV. MOMENTE DE INERȚIE PENTRU PLĂCI PLANE SIMETRICE

IV.1. Exemplu de calcul

Să se calculeze momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa simetrică omogenă din figură, atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii, $Gx^* \| Ox$, $Gy^* \| Oy$. Dimensiunile sunt indicate pe desen, unde a reprezintă unitatea de lungime (Fig. IV.1):

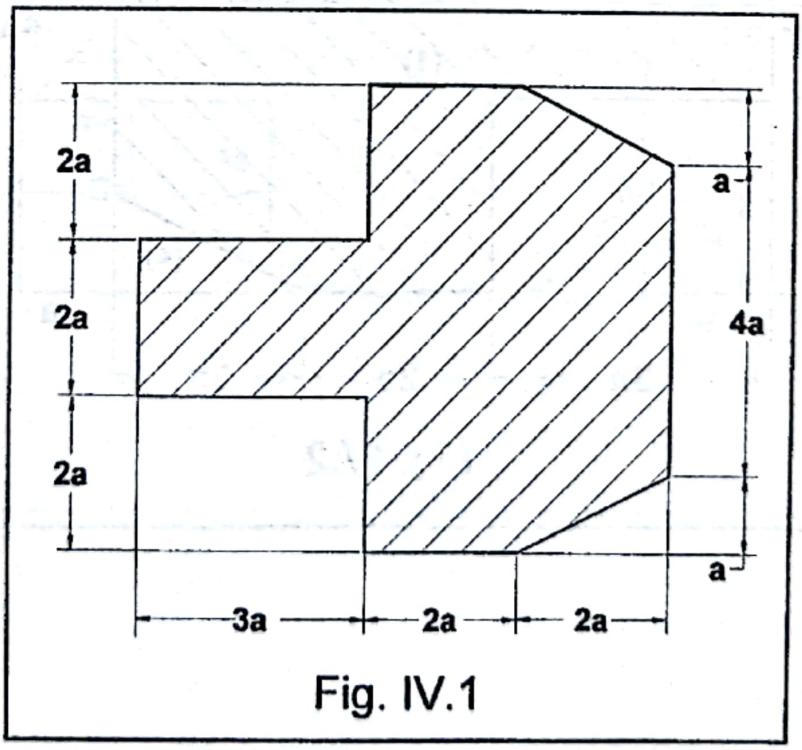


Fig. IV.1

Scanned with OKEN Scanner

IV.1.1. Împărţirea plăcii în figuri elementare.

Se desenează axa Ox pe axa de simetrie a plăcii. Se împarte placa în cinci figuri elementare: (1) - dreptunghi mare plin, de laturi 7a şi 6a; (2) şi (3) – dreptunghiuri decupate de laturi 3a şi 2a; (4) şi (5) – triunghiuri dreptunghice decupate, de catete 2a şi a. Prima latură este latura orizontală, a doua latură este cea verticală (Fig. IV.2).

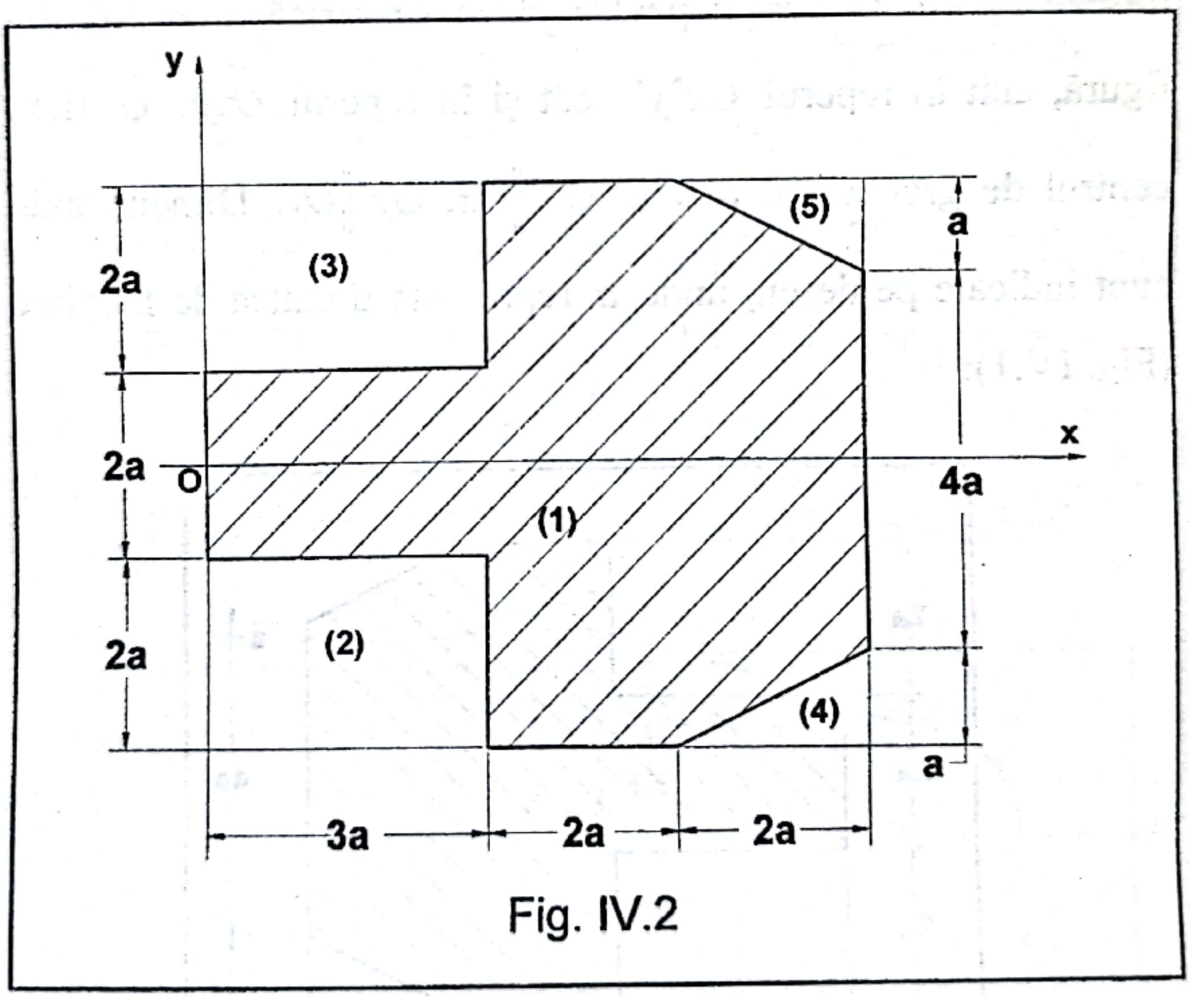


Fig. IV.2

Scanned with OKEN Scanner

IV.1.2. Se determină coordonatele centrului de greutate pentru placă, în reperul *Oxy*.

Placa este simetrica. Centrul de greutate se găseşte pe axa Ox, care este axă de simetrie. Ca urmare $\boxed{y_G = 0}$. Rămâne de determinat numai coordonata $\boxed{x_G}$ a centrului de greutate, folosind centrele de greutate G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 ale figurilor elementare, în reperul Oxy (Fig. IV.3).

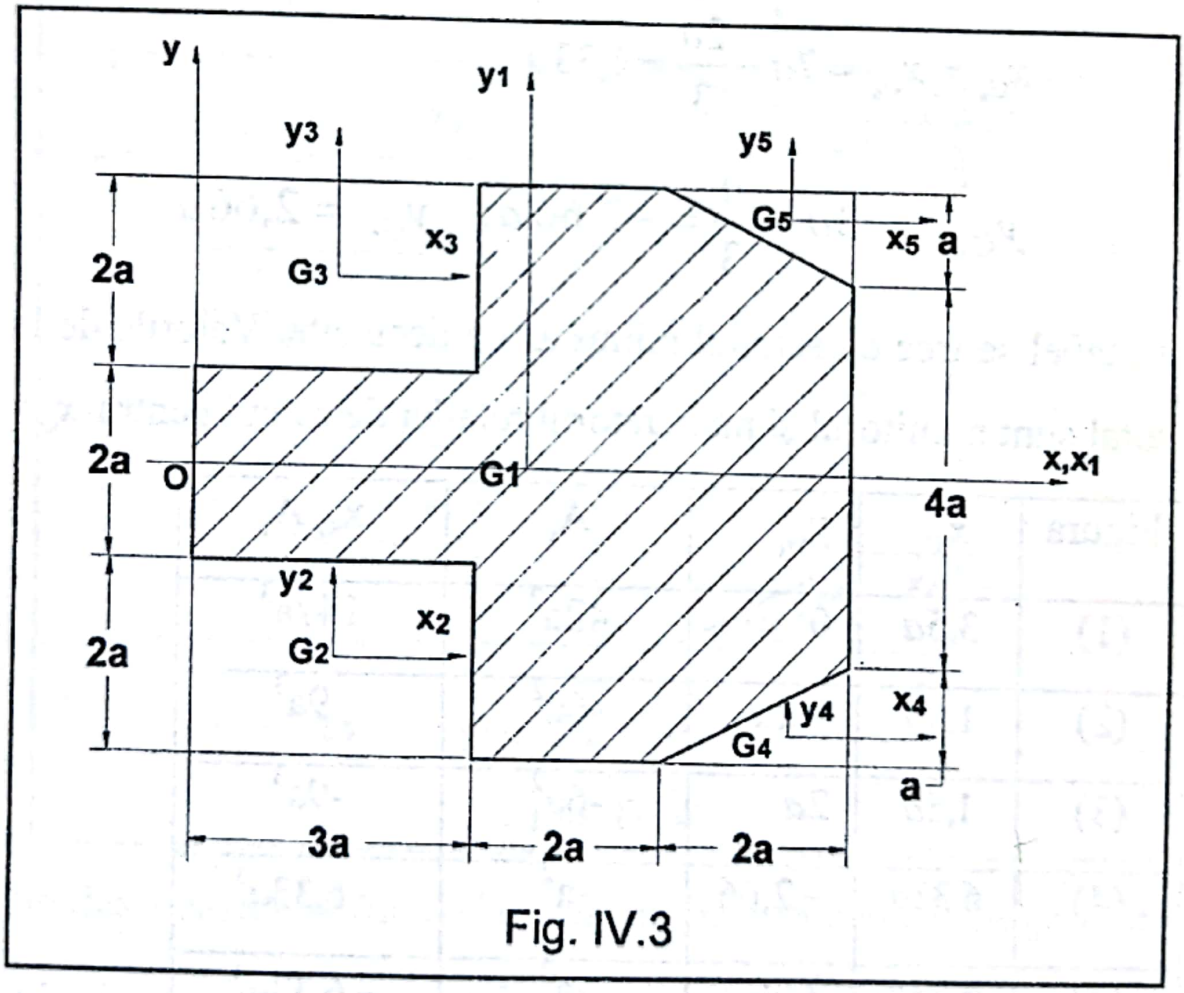


Fig. IV.3

Scanned with OKEN Scanner

Figura fiind simetrică, coordonatele y_{G_1} nu sunt necesare pentru stabilirea centrului de greutate. Ele se determină totuşi şi se trec în tabel, fiind necesare la calculul momentelor de inerţie: $x_{G_1} = \frac{7a}{2} = 3{,}5\,a; \quad y_{G_1} = 0$

$$x_{G_2} = x_{G_3} = \frac{3a}{2} = 1{,}5a; \quad y_{G_2} = -2a, \quad y_{G_3} = 2a$$

$$x_{G_4} = x_{G_5} = 7a - \frac{2a}{3} = 6{,}33\,a$$

$$y_{G_4} = -3a + \frac{a}{3} = -2{,}66\,a; \quad y_{G_5} = 2{,}66\,a$$

În tabel se trec cu semnul minus ariile decupate. Valorile de la total sunt numitorul şi numărătorul relaţiei de calcul pentru x_G:

Figura	x_{G_i}	y_{G_i}	A_i	$x_{G_i}A_i$
(1)	$3{,}5a$	0	$42a^2$	$147a^3$
(2)	$1{,}5a$	$-2a$	$-6a^2$	$-9a^3$
(3)	$1{,}5a$	$2a$	$-6a^2$	$-9a^3$
(4)	$6{,}33a$	$-2{,}66$	$-a^2$	$-6{,}33a^3$
(5)	$6{,}33a$	$2{,}66$	$-a^2$	$-6{,}33a^3$
Total			$28a^2$	$116{,}34a^3$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă coordonatele centrului de greutate ale întregii plăci:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_{G_i} A_i}{\sum_{i=1}^{5} A_i} = \frac{116{,}34a^3}{28a^2} = 4{,}155a \qquad y_G = 0$$

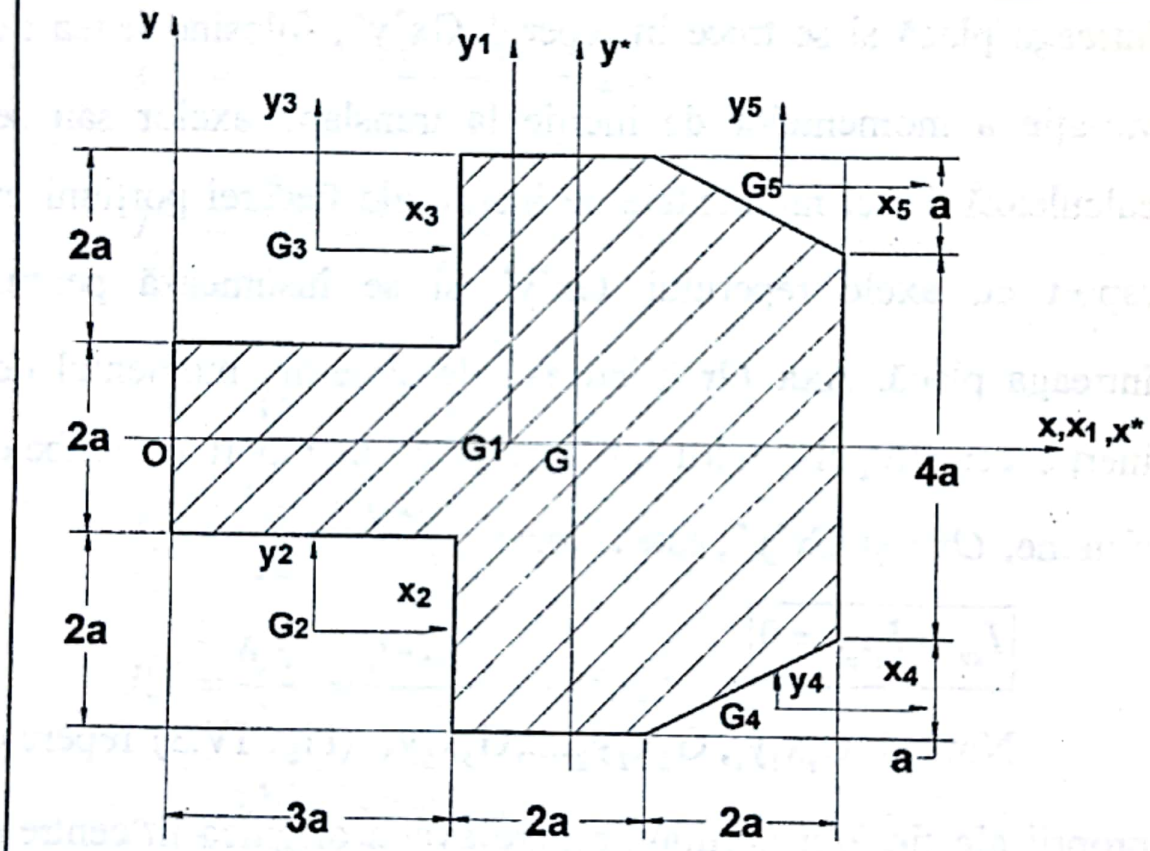


Fig. IV.4

Se desenează reperul Gx^*y^* cu originea în centrul de greutate G şi cu axele Gx^* şi Gy^* paralele cu axele Ox şi Oy (Fig. IV.4).

Scanned with OKEN Scanner

IV.1.3. Calculul momentelor de inerţie centrale principale şi trasarea elipsei de inerţie în reperul Gx^*y^*

Pentru obţinerea momentelor de inerţie ale plăcii în raport cu axele reperului Gx^*y^* se pot aplica două metode: se calculează întâi momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Oxy, apoi se însumează pentru întreaga placă şi se trece în reperul Gx^*y^*, folosind legea de variaţie a momentelor de inerţie la translaţia axelor sau se calculează direct momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Gx^*y^* şi se însumează pentru întreaga placă. Axa *Ox* fiind axă de simetrie, momentul de inerţie centrifugal pentru întreaga placă în raport cu ambele sisteme, *Oxy* şi Gx^*y^*, este zero.

$$\boxed{I_{xy} = I_{x^*y^*} = 0}$$

Notând $G_1x_1y_1$, $G_2x_2y_2$,..., $G_5x_5y_5$ (Fig. IV.3) reperele proprii ale fiecărei porţiuni, repere având originea în centrele de greutate ale porţiunilor şi axele paralele cu axele reperului Oxy, se determină momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului propriu. Laturile fiecărei porţiuni se notează cu b (latura orizontală) şi cu h (latura verticală), în cazul triunghiurilor dreptunghice aceste laturi fiind catetele.

Scanned with OKEN Scanner

Indicii și cifrele din paranteze se referă la numărul de ordine al porțiunii respective. Se folosește tabelul I.5 (Cap.I).

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{7a \cdot (6a)^3}{12} = 126\, a^4$$

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{b_1^3 h}{12} = \frac{(7a)^3 \cdot 6a}{12} = 171{,}5\, a^4$$

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} = 2\, a^4$$

$$I_{y_2}^{(2)} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{(3a)^3 \cdot 2a}{12} = 4{,}5\, a^4$$

$$I_{x_3}^{(3)} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{(3a) \cdot (2a)^3}{12} = 2a^4$$

$$I_{y_3}^{(3)} = \frac{b_3^3 h_3}{12} = \frac{(3a)^3 \cdot 2a}{12} = 4{,}5a^4$$

$$I_{x_4}^{(4)} = \frac{b_4 h_4^3}{36} = \frac{2a \cdot a^3}{36} = 0{,}055a^4$$

$$I_{y_4}^{(4)} = \frac{b_4^3 h_4}{36} = \frac{(2a)^3 \cdot a}{36} = 0{,}22a^4$$

$$I_{x_5}^{(5)} = \frac{b_5 h_5^3}{36} = \frac{2a \cdot a^3}{36} = 0{,}055a^4$$

$$I_{y_5}^{(5)} = \frac{b_5^3 h_5}{36} = \frac{(2a)^3 \cdot a^2}{36} = 0{,}22a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Prima metodă

Se calculează momentele de inerție ale fiecărei porțiuni în raport cu axele reperului Oxy. Se aleg formule de calcul directe, din tab. I.5, pentru porțiuni așezate cu o latură pe axa de calcul. Pentru toate celelalte porțiuni sau se aplică relația lui Steiner (I.24).

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} = 126a^4$$

$$I_y^{(1)} = \frac{b_1^3 h_1}{3} = \frac{(7a)^3 \cdot 6a}{3} = 686a^4$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A_2 y_{G_2}^2 = 2a^4 + 6a^2(-2a)^2 = 26a^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A_2 x_{G_2}^2 = 4{,}5a^4 + 6a^2 \cdot (1{,}5a)^2 = 18a^4$$

Din motive de simetrie între porțiunile (2) și (3) se poate scrie direct:

$$I_x^{(3)} = 26a^4, \quad I_y^{(3)} = 18a^4$$

$$I_x^{(4)} = I_{x_4}^{(4)} + A_4 y_{G_4}^2 = 0{,}055a^4 + a^2(-2{,}66a)^2 = 7{,}13a^4$$

$$I_y^{(4)} = I_{y_4}^{(4)} + A_4 x_{G_4}^2 = 0{,}22a^4 + a^2(6{,}33a)^2 = 40{,}29a^4$$

Din motive de simetrie între porțiunile (4) și (5) se poate scrie direct:

$$I_x^{(5)} = 7{,}13\ a^4, \quad I_y^{(5)} = 40{,}29a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează momentele de inerţie ale întregii plăci în raport cu axele reperului Oxy:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} - I_x^{(4)} - I_x^{(5)}$$

$$I_x = 126a^4 - 26a^4 - 26a^4 - 7{,}13a^4 - 7{,}13a^4 = \frac{179}{3}a^4 = 59{,}74a^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} - I_y^{(4)} - I_y^{(5)}$$

$$I_y = 686a^4 - 18a^4 - 18a^4 - 40{,}29a^4 - 40{,}29a^4 = 569{,}42a^4$$

Se calculează momentele de inerţie ale întregii plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*} = I_x - Ay_G^2 = 59{,}74a^4 - 28a^2 . 0 = 59{,}74\ a^4$$

$$I_{y^*} = I_y - Ax_G^2 = 569{,}42a^4 - 28a^2 .\ (4{,}155\ a)^2 = 86{,}03a^4$$

A doua metodă

Se calculează momentele de inerţie ale fiecărei porţiuni în raport cu axele reperului Gx^*y^*. Axa $Ox \equiv Gx^* \equiv G_1x_1$:

$$I_{x^*}^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} = 126a^4$$

$$I_{y^*}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + A_1(x_{G_1} - x_G)^2 = 171{,}5a^4 + 42a^2 \cdot (3{,}5a - 4{,}155a)^2 = 189{,}519a^4$$

$$I_{x^*}^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A_2(y_{G_2} - y_G)^2 = 2a^4 + 6a^2(-2a - 0a)^2 = 26a^4$$

$$I_{y^*}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A_2(x_{G_2} - x_G)^2 = 4{,}5a^4 + 6a^2(1{,}5a - 4{,}155a)^2 = 46{,}794a^4$$

Scanned with OKEN Scanner

Din motive de simetrie între porțiunile (2) şi (3), se poate scrie direct:

$$I_{x^*}^{(3)} = 26a^4, \quad I_{y^*}^{(3)} = 46{,}794a^4$$

$$I_{x^*}^{(4)} = I_{x_4}^{(4)} + A_4(y_{G_4} - y_G)^2 = 0{,}055a^4 + a^2(-2{,}66a - 0a)^2 = 7{,}13a^4$$

$$I_{y^*}^{(4)} = I_{y_4}^{(4)} + A_4(x_{G_4} - x_G)^2 = 0{,}22a^4 + a^2(6{,}33a - 4{,}155a)^2 = 4{,}95a^4$$

Din motive de simetrie între porțiunile (4) şi (5), se poate scrie direct:

$$I_{x^*}^{(5)} = 7{,}13a^4, \quad I_{y^*}^{(5)} = 4{,}95a^4$$

Se calculează momentele de inerție ale întregii plăci în raport cu axele reperului Gx^*y^*:

$$I_{x^*} = I_{x^*}^{(1)} - I_{x^*}^{(2)} - \ldots - I_{x^*}^{(5)}$$

$$I_{x^*} = 126a^4 - 26a^4 - 26a^4 - 7{,}13a^4 - 7{,}13a^4 = 59{,}74\,a^4$$

$$I_{y^*} = I_{y^*}^{(1)} - I_{y^*}^{(2)} - \ldots - I_{y^*}^{(5)}$$

$$I_{y^*} = 189{,}519a^4 - 46{,}794a^4 - 46{,}794a^4 - 4{,}95a^4 - 4{,}95a^4 = 86{,}03a^4$$

Se observă că pentru momentele de inerție I_x^*, I_y^* s-au obținut aceleaşi valori prin cele două metode de calcul.

Scanned with OKEN Scanner

Unghiul θ de înclinare al axelor centrale principale de inerție este nul, deoarece:

$$tg2\theta = \frac{2I_{x^*y^*}}{I_{y^*} - I_{x^*}} = 0$$

ceea ce înseamnă că axele Gx^*, Gy^* sunt axe centrale principale de inerție, deci I_{x^*} și I_{y^*} sunt momente de inerție centrale principale.

$$I_{x^*} = I_{\min} = 59{,}74\, a^4, \quad I_{y^*} = I_{\max} = 86{,}03\, a^4$$

Se calculează razele de inerție (girație) geometrice:

$$i_{x^*} = \sqrt{\frac{I_{x^*}}{A}} = \sqrt{\frac{59{,}74a^4}{28a^2}} = 1{,}46\, a$$

$$i_{y^*} = \sqrt{\frac{I_{y^*}}{A}} = \sqrt{\frac{86{,}03a^4}{28a^2}} = 1{,}75\, a$$

Ecuația elipsei centrale de inerție:

$$E_G : \frac{x^{*2}}{i_{y^*}^2} + \frac{y^{*2}}{i_{x^*}^2} = 1$$

$$\boxed{E_G : \frac{(x^*)^2}{(1{,}75a)^2} + \frac{(y^*)^2}{(1{,}46a)^2} = 1}$$

curbă reprezentată în (Fig. IV.5).

Scanned with OKEN Scanner

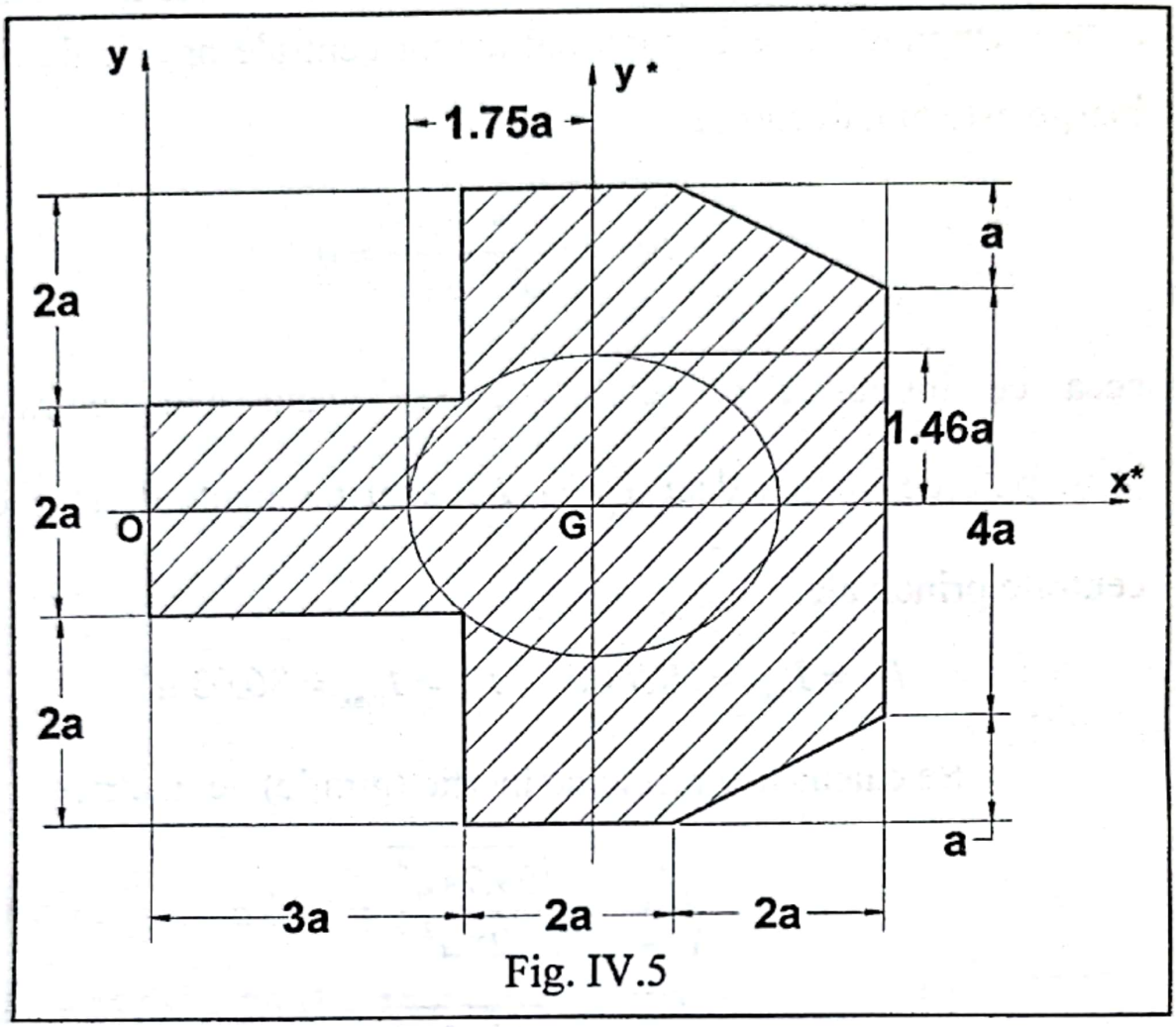


Fig. IV.5

IV.1.4. Calculul momentelor de inerție centrale principale și trasarea elipsei de inerție în reperul *Oxy*

De la punctul III.1.3 – prima metodă – se cunosc:

$$I_x = 59{,}74a^4,\ I_y = 569{,}42a^4,\ I_{xy} = 0$$

ceea ce înseamnă că Ox și Oy sunt axe principale de inerție iar I_x, I_y sunt momentele principale de inerție în reperul Oxy: $I_x = I_{\min} = 59{,}74a^4,\ I_y = I_{\max} = 569{,}42a^4$

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează razele de inerție geometrice

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{59{,}74a^4}{28a^2}} = 1{,}46a$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{569{,}42a^4}{28a^2}} = 4{,}51a$$

şi se scrie ecuația elipsei de inerție în reperul Oxy:

$$E_0 : \frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 \qquad \boxed{E_0 : \frac{x^2}{(4{,}51a)^2} + \frac{y^2}{(1{,}46a)^2} = 1}$$

curbă reprezentată în (Fig. IV.6).

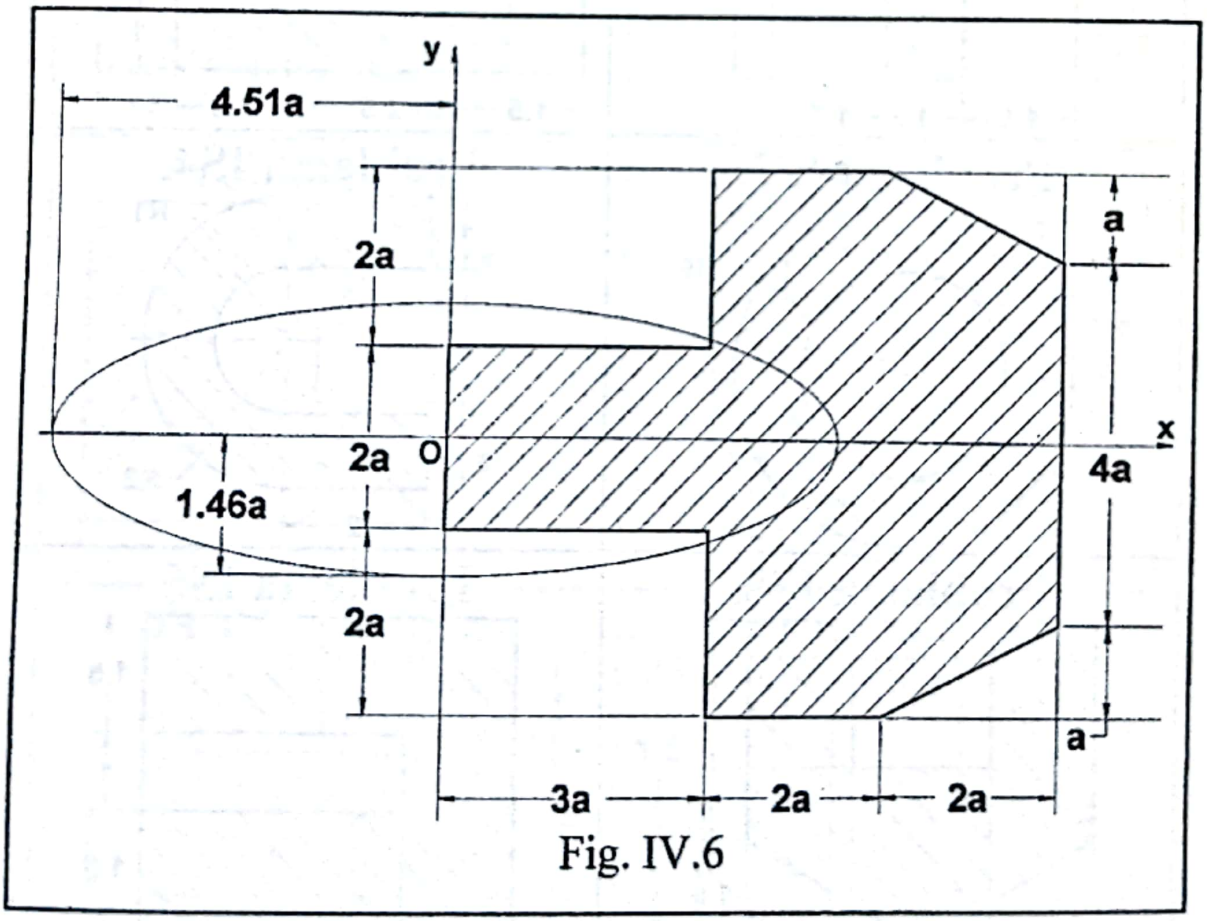


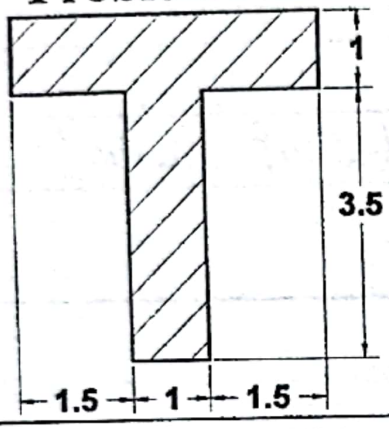
Fig. IV.6

Scanned with OKEN Scanner

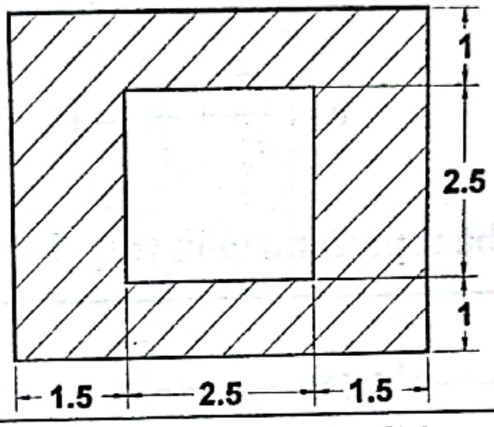
IV.2. Aplicații - plăci plane simetrice

Să se calculeze momentele de inerție principale și să se traseze elipsa de inerție pentru placa simetrică omogenă din figură, atât în reperul Gx^*y^*, cât și în reperul Oxy, G fiind centrul de greutate al plăcii. Axa $Gx^* \parallel Ox$ și axa $Gy^* \parallel Oy$. Dimensiunile sunt indicate pe desen în decimetri.

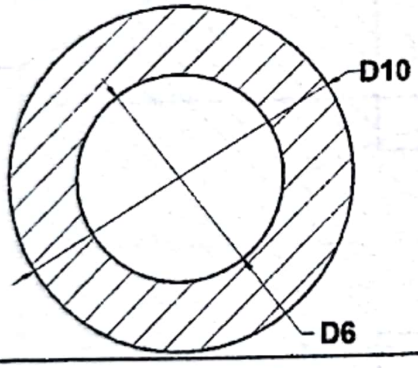
Problema IS1.



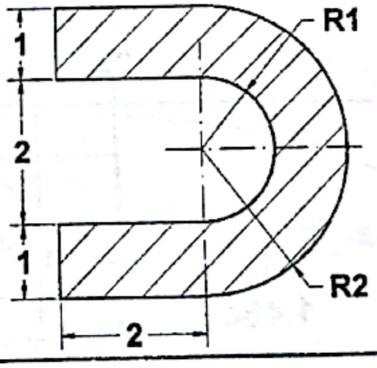
Problema IS2.



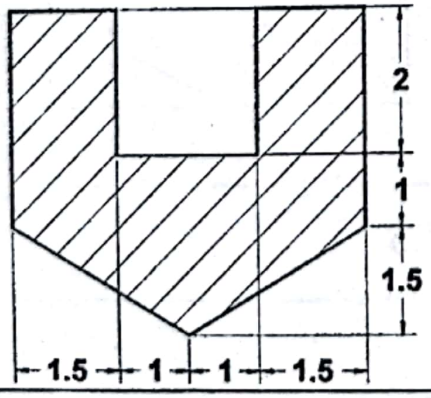
Problema IS3.



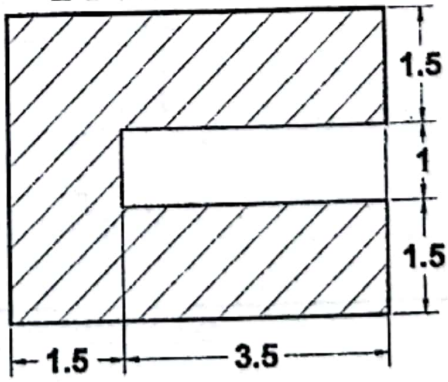
Problema IS4.



Problema IS5.

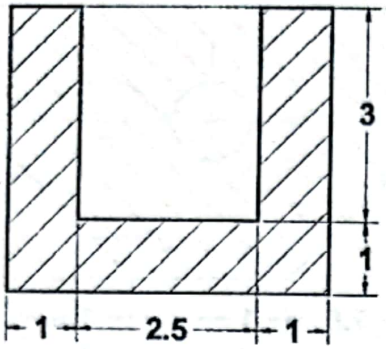


Problema IS6.

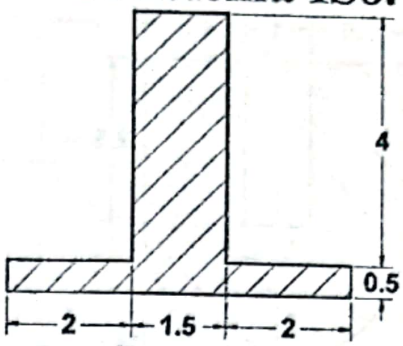


Scanned with OKEN Scanner

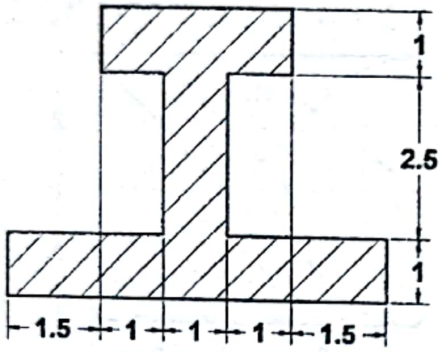
Problema IS7.



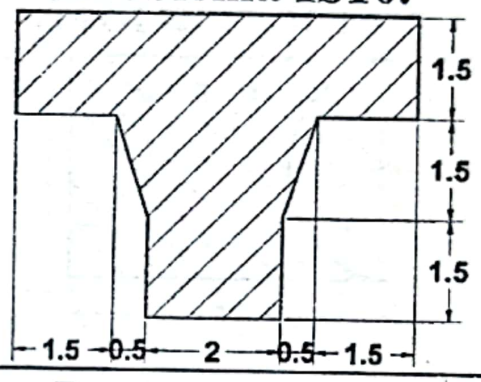
Problema IS8.



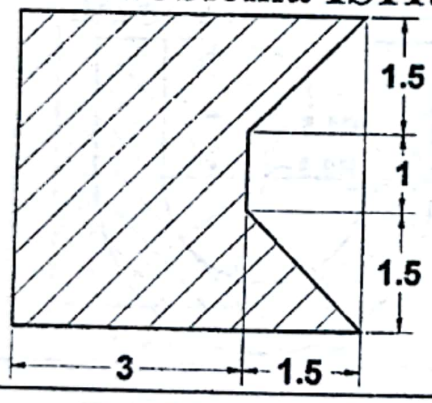
Problema IS9.



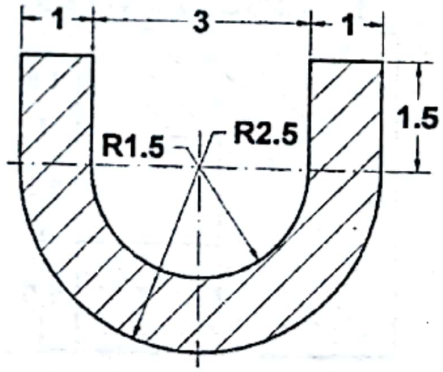
Problema IS10.



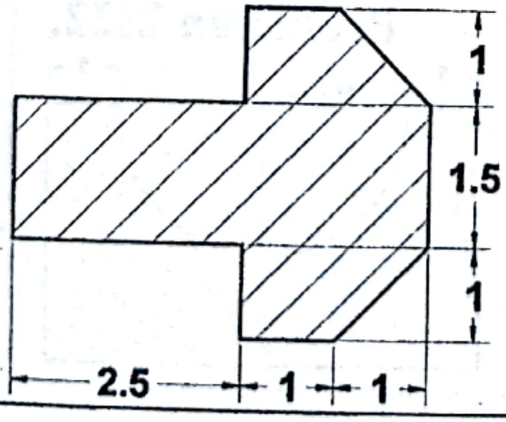
Problema IS11.



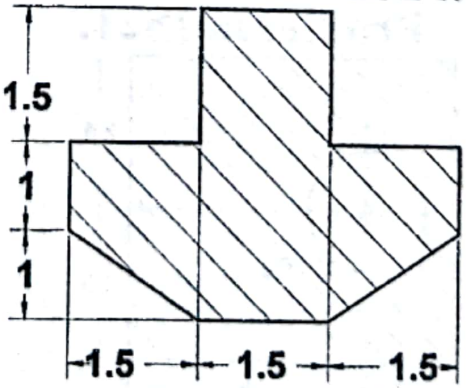
Problema IS12.



Problema IS13.

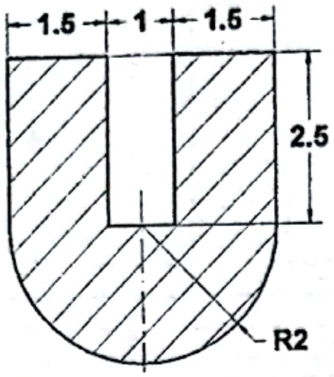


Problema IS14.

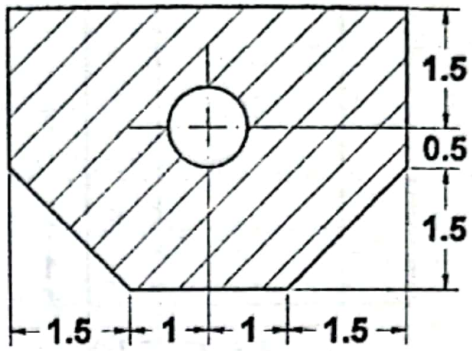


Scanned with OKEN Scanner

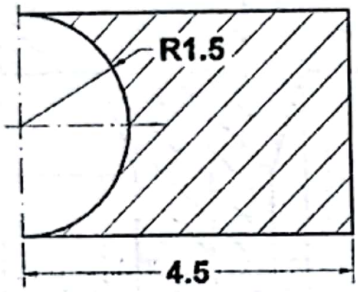
Problema IS15.



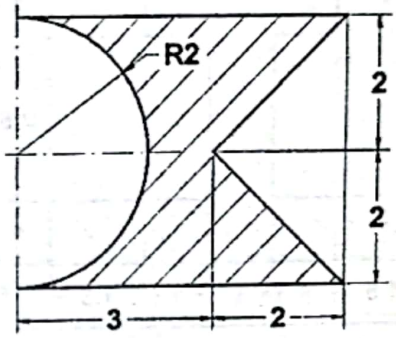
Problema IS16.



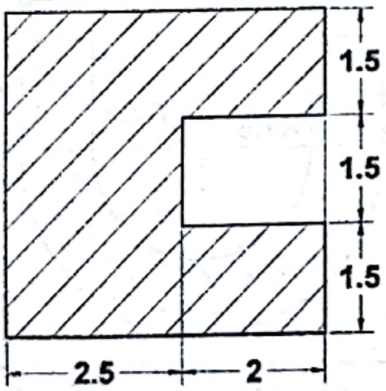
Problema IS17.



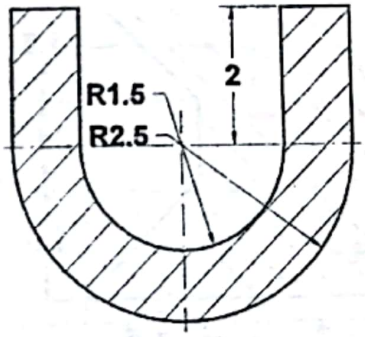
Problema IS18.



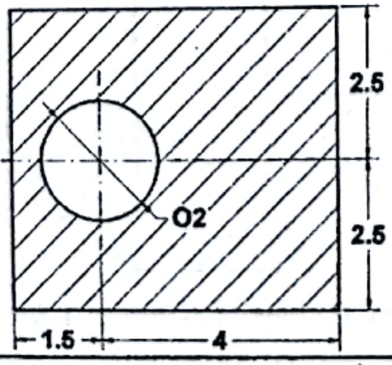
Problema IS19.



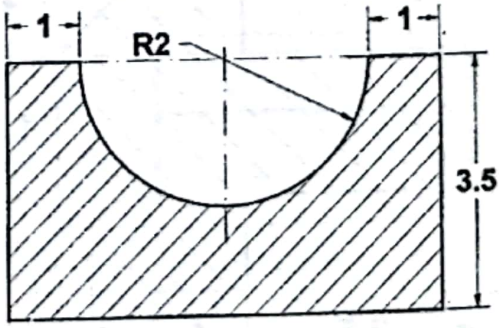
Problema IS20.



Problema IS21.

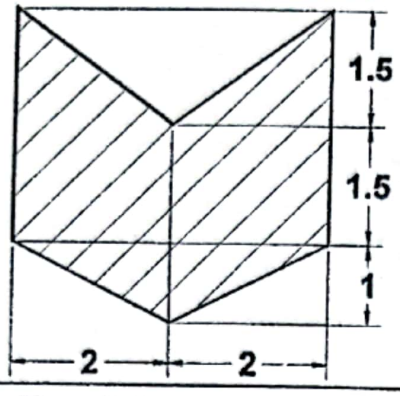


Problema IS22.

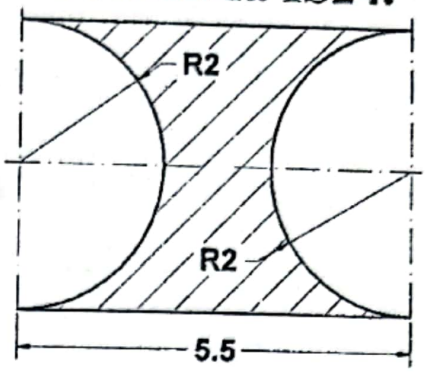


Scanned with OKEN Scanner

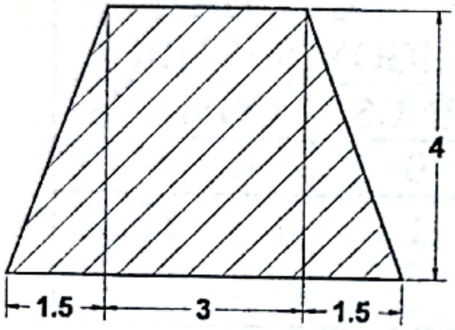
Problema IS23.



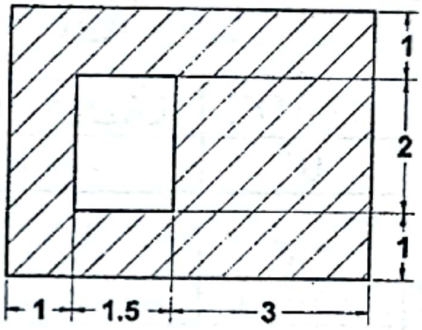
Problema IS24.



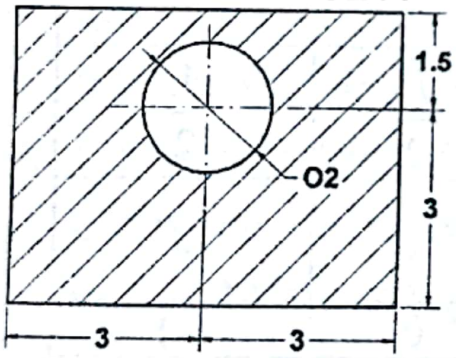
Problema IS25.



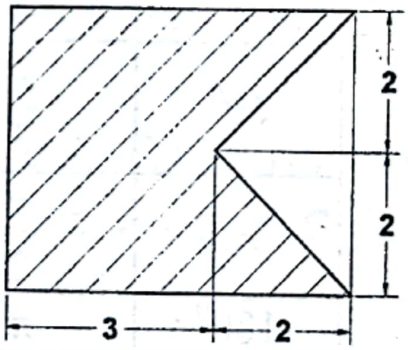
Problema IS26.



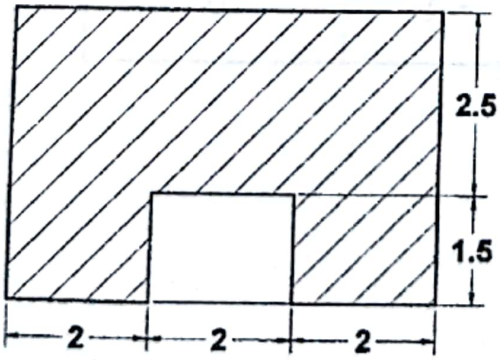
Problema IS27.



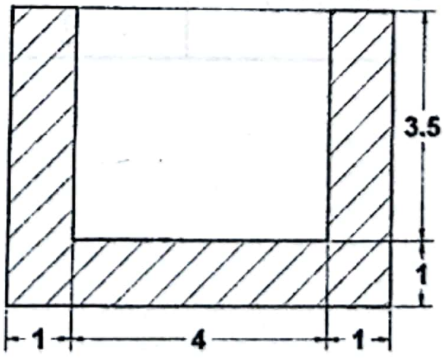
Problema IS28.



Problema IS29.



Problema IS30.



Scanned with OKEN Scanner

ANEXĂ

UNGHI - ARC		FUNCTIA TRIGONOMETRICA	
GRADE	RADIANI	SINUS	COSINUS
0^0	0	0	1
30^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60^0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180^0	π	0	-1
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. Radu Voinea, Dumitru Voiculescu, Valentin Ceauşu, *Mecanica,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
2. Sanda Hanganu, Ileana Slătineanu, *Mecanica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
3. Luminița Budei, Radu Budei, Radu Romanică, *Mecanică (statica şi geometria meselor)*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 2001
4. Luminița Budei, Radu Budei, Radu Romanică, *Elemente de mecanică,* ediția a doua, Casa de editură " Venus" Iaşi, 2004

Scanned with OKEN Scanner